Master 2 MFA 2020/2021

15 juin 2020

Informations générales et Résumés de cours

1 Quelques informations générales

- Pour la partie théorique, chaque étudiant doit valider les trois cours communs (cf. ci dessous) plus quatre cours spécialisés.
- les cours spécialisés sont à choisir parmi les 5 cours proposés à Nantes dans chaque parcours mais aussi parmi les cours proposés à Rennes et dont on trouvera la liste sur le site du CHL : https ://www.lebesgue.fr/node/2951
- La partie pratique consiste en un stage de 4 mois (15 mars, 15 juillet) dans un laboratoire de recherche (pas forcément à Nantes) sous la direction d'un enseignant-chercheur. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.
- Une réunion de rentrée aura lieu à Rennes (IRMAR) le 3 septembre. Elle sera l'occasion de présentée tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Un départ de Nantes sera organisé vers 8h30.

2 Cours communs aux deux parcours (Premier semestre)

Erwan Brugallé : Introduction to differential geometry
The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and classical differentiable objects that lives on these : vector fields, diffeomorphisms, differential forms, de Rahm Cohomology.

Nicolas Depauw : Distribution et Analyse de Fourier pour les EDP
Le but de ce cours est d'abord de renforcer les connaissances des étudiants concernant l'intégration, le calcul différentiel et l'analyse fonctionnelle, pour qu'ils maîtrisent les outils comme les troncatures régulières, les partitions de l'unité, la régularisation par convolution, l'usage des parties denses, les critères

de compacité, et la transformation de Fourier, afin ensuite de présenter les espaces de Sobolev et la théorie des distributions, en particulier des distributions tempérées, et d'en illustrer l'application aux équations aux dérivées partielles.

english version
The aim of this course is first of all to reinforce the knowledge of the students concerning integration, differential calculus and functional analysis, so that they master tools such as regular truncations, unit partitions, regularization by convolution, the use of dense parts, the compactness criteria, and the Fourier transformation, in order to then present Sobolev spaces and the theory of distributions, in particular temperate distributions, and illustrate their application to partial differential equations.

Baptiste Chantraine et Gabriel Rivière : Séminaire des étudiants

3 Parcours Algèbre-Géométrie

3.1 Premier semestre

V. Franjou : Algebraic topology : an introduction .

Susanna Zimmermann : Introduction to affine algebraic geometry
We will introduce affine algebraic varieties over the complex numbers, which are basically zero sets of polynomials over the complex numbers with extra structure. The course will consist of getting to know basic concepts such as morphisms, isomorphisms, irreducibility, tangent space and dimension, all accompanied by examples. Concepts from commutative algebra needed for the course will be repeated as necessary.

3.2 Second semestre

Hossein Abbaspour : Simplicial objects in topology and algebra
Le cours est une introduction aux techniques simpliciales en topologie et algèbre (et géométrie algébrique). Nous commencerons par les notions de base des objets simpliciaux et algèbres homologiques. Nous donnerons ensuite un traitement élémentaire des catégories de modèle, en particulier la catégorie de modèle des anneaux simpliciaux (commutatifs). Comme une sorte d'interlude, nous discuterons les algèbres différentielles graduées (DGA) et le foncteur des chaînes normalisées de la catégorie des anneaux simpliciaux dans la catégorie DGA. Si le temps le permet, nous donnerons une introduction à la géométrie algébrique dérivée.

Version anglaise :

This course is an introduction to the applications of simplicial technics in algebra, topology and algebraic geometry. We will begin with the basic notions

In the theory of simplicial objects and homological algebra. This will be followed by an introduction to model categories and in particular the model category of simplicial (commutative) rings. As an interlude, we will discuss the differential graded algebras and the normalized chain functor to the category of DGA. If time permits we will give an introduction to the ideas of derived algebraic geometry.

Marco Golla : Branched covers in low dimensions

On étudiera les revêtements ramifiés des variétés lisses en dimension 2, 3 et 4. On commencera avec la formule de Riemann–Hurwitz pour les surfaces ; après, on regardera les revêtements des 3-variétés ramifiés sur entrelacs et les 4-variétés qu'ils bordent. Après on montrera le théorème de G-signature en dimension 4 et on donnera quelques applications, en particulier aux plongements des surfaces (singulières ou pas) dans des 4-variétés. En fonction des intérêts du publique, on pourra faire des liaisons avec la géométrie complexe, de contact ou symplectique. Les connaissances en topologie différentielle et algébrique, au niveau des cours du premier semestre et du séminaire des étudiants, est essentielle ; les notions de topologie en baisse dimension seront révisés le long du cours.

Version anglaise :

We will study branched covers of smooth manifolds of dimensions 2, 3, and 4. We will start with the Riemann–Hurwitz formula for surfaces ; we will then look at covers of 3-manifolds branched over links and the 4-manifolds they bound. We will then prove the G-signature theorem in dimension 4, and discuss some applications, in particular to embeddings of (possibly singular) surfaces in 4-manifolds. Depending on time and on the audience's interests, we might discuss some complex-geometric, contact, or symplectic aspects of branched covers. Prior knowledge of differential topology and algebraic topology, at the level of the first-semester courses and student seminars, is required ; the more low-dimensional notions will be reviewed along the way.

Baptiste Chantraine : Introduction à la géométrie symplectique.

L'objectif du cours est de donner une introduction à la géométrie symplectique. Dans la première moitié du cours nous donnerons les défintions de base de la géométrie symplectique et nous étudierons les sous-variétés lagrangiennes dans les variétés symplectiques. Nous justifierons leur importance dans et en dehors de la géométrie symplectique. Dans la deuxième moitié du cours nous parlerons de deux outils utiles pour étudier les sous-variétés lagrangiennes dans les fibrés cotangents : les familles génératrices et les faisceaux constructibles.

Version anglaise :

The goal of the course is to introduce symplectic geometry. In the first half of the class we will review basics definitions from symplectic geometry and we will stydu Lagrangian submanifolds of symplectic manifold. We will justify the importance of these submanifolds within and outside symplectic geometry. In the second half of the class we will study two tools used to study Lagrangian submanifolds in cotangent bundles : generating family and constructible sheaves.

4 Parcours Analyse-Probabilité

4.1 Premier semestre

Nicolas Raymond : Elements of spectral theory

Ce cours de théorie spectrale est basé sur des notes, en anglais, librement accessibles ; elles donneront aux étudiants francophones le loisir d'exercer leur anglais :

https ://nraymond.perso.math.cnrs.fr/spectral-theory.pdf

1) Le cours débutera avec des considérations très élémentaires dont le but est double : se rafraîchir la mémoire et introduire des idées qu'on retrouvera plus tard dans des situations plus générales.

2) Il se poursuivra par l'étude des opérateurs non bornés (fermés, fermables, auto-adjoints, etc.) et la définition du spectre (et même de certains types de spectre : discret et essentiel). On en profitera pour (re)visiter un théorème de Lax-Milgram qui permet de définir des opérateurs fermés bijectifs à l'aide de formes sesquilinéaires coercives.

3) Le reste du cours sera consacré à l'étude des relations entre les propriétés des opérateurs et les propriétés du spectre. Ainsi, on exposera la théorie de Fredholm et, à cette occasion, on revisitera la description du spectre des opérateurs compacts ou à résolvante compacte (par réduction à la dimension finie et l'utilisation de l'analyse complexe).

4) La fin du cours explorera le cas particulier des opérateurs auto-adjoints (borne sur la résolvante, principe du min-max) ; on montrera notamment que spectres discret et essentiel sont complémentaires dans le spectre. Des exemples seront fournis tout au long du cours : Laplacien de Dirichlet, oscillateur harmonique, opérateur de Schrödinger. On s'amusera à calculer le spectre essentiel dans certains cas particuliers. Si le temps le permet (et il ne le permettra sûrement pas), on ébauchera une présentation du calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints et de la fameuse mesure spectrale.

Benoit Grébert : Resonances, Normal forms and Hamiltonian non-linear PDEs.

Les solutions de petites amplitudes d'équations aux dérivées partielle non-linéaires dispersives sur un compact sans bord (par exemple un tore ou une sphère) sont soumises à deux effets concurrents :

- la dispersion des ondes, conséquence du fait que les ondes planes solutions de la partie linéaire de l'équation voyagent avec des vitesses différentes (les ondes s'éloignent les unes des autres)
- la compacité du domaine qui incite à l'interaction via la non-linéarité (les ondes sont amenées à se revoir souvent !)

Qui gagne ? La dynamique en temps long va-t-elle vers la stabilité ou la turbulence ?

Nous essaierons de répondre (partiellement) à ces questions sur quelques exemples et à travers des méthodes de formes normales dans le cadre des EDPs Hamiltoniennes.

Version anglaise :

Solutions of small amplitudes of non-linear dispersive partial differential equations on a compact without boundary (e.g. a torus or a sphere) are subject to two concurrent effects :

— wave dispersion, a consequence of the fact that the plane waves solving the linear part of the equation travel with different velocities (the waves move away from each other).

— the compactness of the domain which encourages interaction via non-linearity (the waves have to see each other often !)

Which wins ? Does the dynamics in long time go towards stability or turbulence ? We will try to answer (partially) these questions on a few examples and through normal form methods in the context of Hamiltonian PDEs.

4.2 Second semestre

Frédéric Hérau : Hypocoercivity

In the past 15 years, a new theory has been developped concerning the long time behavior of kinetic equations, under the name "hypocoercivity". This approach has now proved to be very efficient in the study of a large range of equations. This course is devoted to the main features of this approach in the hilbertian case : basic notions of coercivity and hypocoercivity, relations between the spectral theory and the long time behavior of linear or linearized models. We shall also - depending on the time remaining - study the nonlinear perturbative case, the case of collision kernels of Boltzmann type, the connection with the theory of hypoellipticity and the recent theory of enlarged spaces.

Gabriel Rivière : Dynamics of the Schrödinger equation

L'équation de Schrödinger est l'une des équations fondamentales de la mécanique quantique. Ce cours sera dédié à l'étude de ses propriétés d'un point de vue mathématique : nous décrirons ses propriétés de localisation et de régularisation dans le cadre périodique. Ceci sera l'occasion d'introduire des outils standards d'analyse de Fourier (comme les opérateurs pseudo-différentiels) et de théorie du contrôle.

Mots clefs : analyse de Fourier, physique mathématique, théorie spectrale, analyse semi-classique, opérateurs pseudo-différentiels, analyse harmonique, contrôle des EDP.

Version anglaise :

The Schrödinger equation is one of the fundamental equation of quantum mechanics. This course will be devoted to the study of its properties from a mathematical perspective : we will describe its localization and regularizing properties in the periodic framework. This will give us the opportunity to introduce standard tools from Fourier analysis (such as pseudodifferential operators) and control theory.

Keywords : Fourier analysis, mathematical physics, spectral theory, semiclassical analysis, pseudodifferential operators, harmonic analysis, control of PDE.

Joe Viola : Pseudospectrum, semigroups, and quasimodes for non-selfadjoint operators.

Thanks to the spectral theorem, a self-adjoint (or normal) operator on Hilbert space can be nearly completely understood by studying its eigenvalues and eigenvectors (or their continuous analogues). Non-selfadjoint operators, which appear in many applications including the theory of resonances, kinetic theory, and perturbation theory, are not so easily reduced to their spectral decomposition. We will study ways to measure and understand the distance between the selfadjoint ideal and the true behavior of non-selfadjoint operators.