Master 2 MFA 2019/2020

9 mai 2019

Résumé de cours

1 Parcours Algèbre-Géométrie

1.1 Premier semestre

Erwan Brugallé : Géométrie énumérative des courbes algébriques complexes, réelles et tropicales.

La géométrie énumérative s'intéresse au comptage d'objets géométriques satisfaisant des contraintes géométriques données. Ce type de problème peut être très simple ("Combien de droites passent pas deux points ?"), mais peut aussi déboucher sur des questions ouvertes et difficiles. Le but de ce cours est d'étudier plusieurs problèmes énumératifs concernant les courbes dans le plan, suivant trois perspectives : en géométrie algébrique complexe, en géométrie algébrique réelle, et en géométrie tropicale. Nous verrons comment ces trois perspectives, à priori différentes, sont en fait intimement reliées. Quelques notions élémentaires de géométrie algébrique et géométrie différentielles sont souhaitables pour suivre ce cours. Aucune connaissance préalable en géométrie tropicale n'est requise.

Friedrich Wageman : Algèbre homologique

Nous allons traiter dans ce cours les sujets classiques de l'algèbre homologique, comme illustrés dans [2], [3] ou encore [4]. Il s'agit d'abord d'introduire le language des catégories et des foncteurs, en mettant l'accent sur les foncteurs adjoints et les foncteurs exacts à gauche ou à droite. Ensuite viendra un chapitre plus spécifiquement sur le produit tensoriel et le bifoncteur Hom. Après cela, nous allons parler du formalisme général des foncteurs dérivés, en illustrant la théorie sur les foncteurs Ext et Tor. L'étude du foncteur Ext se prolongera dans des rudiments de la cohomologie des groupes ainsi que la cohomologie des algèbres de Lie. Nous terminerons sur la construction de la catégorie dérivée (comme construite dans [1]). Si le temps le permet, nous essayerons de caser une ébauche de la cohomologie des faisceaux.

References

1. Gelfand, Sergei I. ; Manin, Yuri I. Methods of homological algebra. Sec- ond edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

2. Hilton, P. J. ; Stammbach, U. A course in homological algebra. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York, 1997
3. Mac Lane, Saunders, Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995
4. Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cam- bridge, 1994

1.2 Second semestre

Nicolas Dutertre : Géométrie semi-algébrique et o-minimale

Comptage des racines d'un polynôme réel, ensembles semi-algébriques et théorème de Tarski-Seidenberg, applications semi-algébriques, inégalité de Lojasiewicz, propriétés topologiques des semi-algébriques et théorème de Hardt, introduction aux structures o-minimales.

Hossein Abbaspour : K-Théorie

K-theory is in some sense a meeting ground for several other mathematical subjects, including number theory, geometric topology, algebraic geometry, algebraic topology and operator algebras, relating to constructions like the ideal class group, Whitehead torsion, coherent sheaves, vector bundles and index theory. The main objective of the course is the construction of characteristics classes (as functor) in various settings with values in homology/cohomology theories such as De Rham, Hochschild and cyclic homology,... and eventually comparing them.

Topics that can be included :

Topological K-Theory, Algebraic K-Theory, Higher K-theory, Hochschild and cyclic homology, Chern Character (with value in De Rham cohomology, Hochschild /cyclic homology,..) , HKR Theorem and a few classical results from non-commutative geometry, Euler class and Riemann-Roch-Hirzebruch type theorem for DG-Algebras, (bi)simplicial spaces and the realization lemma and application for Mapping spaces, Sheaves, Hochschild homology for O_x-modules, Todd class and Riemann-Roch type theorems.

References :

Loday, Jean-Louis Cyclic homology.. . Springer-Verlag, Berlin, 1992. Karoubi, Max K-theory. An introduction. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. xviii+308 pp Damien Calaque -Carlo A. Rossi, Lectures on Duflo Isomorphisms in Lie Algebra and Complex Geometry

Paolo Ghiggini : Exemples de symétrie miroir homologique

Description : La symétrie miroir est un lien surprenant entre la géométrie symplectique et la géométrie algébrique découvert par des physiciens au début des années '90. La symétrie miroir homologique, proposé quelques années plus tard par M. Kontsevich, conjecture que la catégorie de Fukaya dérivée d'une variété symplectique X devrait être isomorphe à la catégorie dérivée des faisceaux cohérents d'une variété algébrique X'. Plusieurs exemples de variétés miroirs sont connus, mais la conjecture est encore largement ouverte. Dans le cours on s'intéressera à la symétrie miroir pour les variétés symplectiques les plus simples : les surfaces orientable, où la catégorie de Fukaya est combinatoire.

2 Parcours Analyse-Probabilité

2.1 Premier semestre

Nicolas Raymond : Elements of spectral theory

Ce cours de théorie spectrale est basé sur des notes, en anglais, librement accessibles ; elles donneront aux étudiants francophones le loisir d'exercer leur anglais :

https ://nraymond.perso.math.cnrs.fr/spectral-theory.pdf

1) Le cours débutera avec des considérations très élémentaires dont le but est double : se rafraîchir la mémoire et introduire des idées qu'on retrouvera plus tard dans des situations plus générales.

2) Il se poursuivra par l'étude des opérateurs non bornés (fermés, fermables, auto-adjoints, etc.) et la définition du spectre (et même de certains types de spectre : discret et essentiel). On en profitera pour (re)visiter un théorème de Lax-Milgram qui permet de définir des opérateurs fermés bijectifs à l'aide de formes sesquilinéaires coercives.

3) Le reste du cours sera consacré à l'étude des relations entre les propriétés des opérateurs et les propriétés du spectre. Ainsi, on exposera la théorie de Fredholm et, à cette occasion, on revisitera la description du spectre des opérateurs compacts ou à résolvante compacte (par réduction à la dimension finie et l'utilisation de l'analyse complexe).

4) La fin du cours explorera le cas particulier des opérateurs auto-adjoints (borne sur la résolvante, principe du min-max) ; on montrera notamment que spectres discret et essentiel sont complémentaires dans le spectre. Des exemples seront fournis tout au long du cours : Laplacien de Dirichlet, oscillateur harmonique, opérateur de Schrödinger. On s'amusera à calculer le spectre essentiel dans certains cas particuliers. Si le temps le permet (et il ne le permettra sûrement pas), on ébauchera une présentation du calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints et de la fameuse mesure spectrale.

Nicolas Petrelis : Markov processes

This course will be mainly dedicated to Markov chains and continuous time Markov chains. Along the way we will also study random Poisson measures. These are very important mathematical tools to model stochastic phenomenona. In particular, this course will be a good preparation for those willing to follow "Stochastic models of population dynamics" at the second semester.

2.2 Second semestre

Philippe Carmona : Stochastic models of population dynamics

We shall consider models for evolving populations beginning with classical models : birth and death processes, and branching processes. Then we shall consider structured population models, where the population is modeled as a finite measure on a state space that can model both continuous and discrete characteristics of individuals. The evolution of individuals is a mix of deterministic and stochastic behaviour, and the population process is then a continuous time Markov process defined on the space of finite measures. Eventually, scaling limits for large initial populations will give back some classical deterministic models of population dynamics.

Gabriel Rivière : Equation de Schrödinger semi-classique

La limite semi-classique de la mécanique quantique est un régime dans lequel la constante de Planck est négligeable devant les autres actions physiques mises en jeu dans le système. Dans cette limite, le système physique considéré est gouverné par les les équations de la mécanique classique. D'un point de vue mathématique, ce type d'asymptotiques est au coeur de l'analyse microlocale (ou semi-classique) dont le champ d'applications est extrêmement varié : équations aux dérivées partielles, théorie spectrale, topologie symplectique, géométrie aléatoire, systèmes dynamiques hyperboliques, etc.

L'objectif de ce cours sera d'introduire ces outils d'analyse semi-classique et de les illustrer à travers l'étude de la dynamique et du spectre de l'équation de Schrödinger sur le tore. Le cours débutera par des rappels d'analyse de Fourier (périodique et non périodique).

Références. - M. Ruzhansky, V. Turunen. Pseudodifferential operators and symmetries, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin (2010) - M. Zworski. Semiclassical analysis, volume 138 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Cristina. Benea : Introduction to harmonic analysis

- Dyadic analysis/geometry of dyadic sets ; distribution function, (weak) Lp spaces and interpolation
- Hardy-Littlewood maximal function and Calderon-Zygmund decomposition ; Calderon-Zygmund operators
- Marcinkiewicz multipliers ; square functions ; some useful inequalities
- BMO spaces ; good lambda inequalities in harmonic analysis
- Martingales in (harmonic) analysis ; another look at Doob and Burkholder-Gundy inequality