M2 Mathématiques fondamentales

Année 2020-2021

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

Mihai Gradinaru mihai.gradinaru@univ-rennes1.fr.

Les cours sont organisés en thématiques :

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters rennais.

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Ying Hu

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

* **Systèmes dynamiques et théorie ergodique** (6 ECTS) par Bachir Bekka

L'objet du cours portera sur les systèmes dynamiques donnés par une transformation T mesurable sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ dont il préserve la mesure μ. De tels systèmes abondent, les exemples typiques incluant les translations par un nombre irrationnel sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou les éléments de $M_n(\mathbf{Z})$ agissant sur $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. L'objectif est d'étudier les propriétés statistiques de T^n quand $n \to \infty$. Les thèmes abordés seront : ergodicité, mélange, mélange fort ; théorèmes ergodiques ; unique ergodicité ; entropie.

* **Statistique des processus** (6 ECTS) par Ronan Le Guével

Ce cours traite de diverses procédures d'estimation pour des processus stochastiques à temps continu possédant des sauts. Nous considérons dans un premier temps les propriétés classiques des processus de comptage et de renouvellement, avant d'étudier plus en détail le processus de Poisson simple et ses généralisations comme les processus de Poisson inhomogènes et composés. Les processus de Markov à sauts purs sont également abordés d'un point de vue probabiliste et statistique. On donnera enfin pour terminer quelques méthodes d'estimation pour des modèles de solutions d'équations différentielles stochastiques.

* **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Gilles Stupfler

Ce cours est centré sur la question de l'estimation dans les modèles paramétriques, c'est-à-dire lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie. Le cours commencera par une exposition des méthodes classiques d'estimation pour ce type de modèle. On discutera ensuite de notions permettant de comparer les estimateurs paramétriques, ainsi que leur optimalité. Une ouverture vers le cadre semi-paramétrique, dans le cadre de la statistique des valeurs extrêmes, sera présentée.

* **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Marian Hristache

> Dans ce cours, nous nous attachons à estimer des objets de dimension infinie tels qu'une densité de probabilité ou une fonction de régression. Le cours se décompose en trois parties. Nous passons tout d'abord en revue les méthodes principales d'estimation non-paramétrique telles que les méthodes à noyau, les estimateurs par projection et les méthodes de régularisation. Puis nous nous intéressons à l'optimalité des procédures et aux bornes indépassables de performance : c'est la théorie minimax. Enfin, en lien avec la théorie de l'apprentissage statistique, nous étudions des méthodes dites de sélection de modèles, permettant l'adaptation des estimateurs, ces derniers atteignants des vitesses optimales d'estimation sous diverses hypothèses sur les fonctions à estimer.

Second semestre.

* **Asymptotique des processus de Markov** (6 ECTS) par Brice Franke

> Dans ce cours nous allons discuter le comportement asymptotique de chaines de Markov sur des espaces généraux. Les notions abordés seront les noyaux de transition, l'irréductibilité, les ensembles petits, la périodicité et l'apériodicité, la récurrence et la transience, les mesures invariantes.

* **Processus stochastiques à sauts** (6 ECTS) par Mihai Gradinaru

> Ce cours contiendra un grande partie d'introduction aux processus stochastiques ayant des sauts (essentiellement des processus de Lévy et si possible les subordinateurs) et au calcul stochastique associé, des ÉDS dirigées par des processus à sauts, *etc.* Dans une deuxième partie on donnera quelques exemples de modèles qui pourront reposer sur ce type de processus.

* **Grandes déviations et applications** (6 ECTS) par Mathias Rousset

> Ce cours propose de présenter les bases de la théorie des grandes déviations (qu'on peut vulgariser comme la « théorie asymptotique des évènements rares »). On développera tout d'abord une version simplifiée mais rigoureuse du grand classique *Large Deviations Techniques and Applications* de Dembo et Zeitouni, avec pour objectif la preuve du théorème de Sanov (indispensable à la culture de tout probabiliste). Puis nous proposerons aux étudiants l'étude de deux grandes applications : i) la dérivation de la thermodynamique à partir de la mécanique statistique de systèmes de particules, et ii) la limite petit bruit d'équations différentielles stochastiques à la Freidlin-Wentzell (et son utilité en physique et en ingénierie).

* **deux cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI** :
  ** *Fouille du web et traitement du langage*

  > Ce cours est une introduction à la collecte de données textuelles et au traitement automatique du language.

  ** *Analyse des données fonctionnelles*

  > Dans ce cours les étudiants apprennent les idées principales, la théorie associée et les routines numériques de l'analyse des données fonctionnelles.

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

* **Analyse complexe en plusieurs variables** (6 ECTS) par Christophe Dupont

Le cours commence par introduire les fonctions holomorphes et les fonctions pluri-sous-harmoniques sur les ouverts de $\mathbf{C}^n$. On s'intéressera ensuite à des questions de prolongement. On étudiera en particulier les fonctions holomorphes (phénomène de Hartogs, domaines d'holomorphie, domaines pseudoconvexes, problème de Levi), les sous-ensembles analytiques (théorème de préparation de Weierstrass, théorème de Remmert-Stein) et les courants d'intégration sur les sous-ensembles analytiques (théorème de Lelong).

* **Géométrie complexe** (6 ECTS) par Benoît Claudon

Ce cours fait suite à celui d'*analyse complexe en plusieurs variables*. Son objectif est d'introduire certaines notions de base de la géométrie complexe : variétés complexes, fibrés vectoriels holomorphes et métriques hermitiennes sur ces objets. La notion de formes différentielles de type (p, q) (propre à la géométrie complexe) permet de définir des groupes de cohomologie (avatar complexe de la cohomologie de De Rham) dits de Dolbeault. Nous verrons comment la positivité d'une métrique s'incarne dans ce contexte : théorème d'annulation (pour la cohomologie) et de plongement de Kodaira dans le cas des métriques sur les fibrés en droites ; décomposition de Hodge pour les métriques kählériennes.

* **Théorie de l'intersection en géométrie algébrique I** (6 ECTS) par Florian Ivorra

Dans ce premier cours, nous présenterons les ingrédients algébriques importants pour le développement de la théorie de l'intersection en géométrie algébrique. Le cours suivra le programme suivant : Introduction ; Notions de base en algèbre commutative ; Anneaux et modules noethériens et artiniens ; Théorie algébrique de la dimension ; Anneaux réguliers ; Flitrations, graduations, polynômes de Hilbert-Samuel.

* **Théorie de l'intersection en géométrie algébrique II** (6 ECTS) par Florian Ivorra

Ce second cours développe le point de vue géométrique sur la théorie de l'intersection en géométrie algébrique.

* **Fondements de la géométrie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

* **Topologie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

Ces cours forment une paire de cours complémentaires.
Le premier commencera par discuter des concepts de base de la topologie différentielle, par exemple ce qu'est une variété, un fibré, ou une carte lisse entre les variétés. Nous donnerons des exemples montrant que de tels objets apparaissent naturellement.
Le second se concentrera ensuite sur les formes différentielles et la cohomologie de de Rham, prouvant qu'il s'agit d'un invariant topologique, le calculant dans quelques cas, et obtenant certaines des applications standard telles que le théorème de point fixe de Browder.
Pour conclure la classe, nous discuterons de la position générale et de certaines de ses applications telles que le théorème de plongement de Whitney ou la formule de Hopf. Si le temps le permet nous discuterons aussi de la notion de degré, tant du point de vue de la cohomologie de De Rham que du point de vue de la position générale.

Second semestre.

* **Géométrie algébrique réelle** (6 ECTS) par Goulwen Fichou

Les objets de la géométrie algébrique réelle sont naturellement des sous-ensembles d'un espace affine $\mathbf{R}^n$, déterminés par l'annulation d'un — seul ! — polynôme. L'étude de ces ensembles mêle alors propriétés algébriques (de type Nullstellensatz) et topologiques. Ces ensembles viennent naturellement avec des anneaux de fonctions, qui permettent de refléter ces propriétés : des fonctions polynomiales bien sûr, mais plus généralement des fonctions de Nash (analytiques et vérifiant une équation polynômiale à coefficients polynomiaux), ou encore des fonctions analytiques par arcs (analytiques). Certains de ces anneaux sont noethériens, d'autres pas, mais tous permettent de mieux comprendre les ensembles algébriques réels.

* **Introduction à la géométrie torique** (6 ECTS) par Carl Tipler

Dans ce cours, on étudiera les variétés qui sont obtenues par compactification d'un tore complexe. On donnera leur description combinatoire en terme d'éventails, établissant un lien entre la géométrie des objets convexes (cônes, polytopes, etc) et la géométrie algébrique. On étudiera par la suite les diviseurs et faisceaux cohérents de ces variétés, en particulier leur cohomologie. Enfin, si le temps le permet, le cours s'orientera vers l'étude des singularités toriques et leurs résolutions.

* **Groupes et algèbres de Lie** (6 ECTS) par François Maucourant & Barbara Schapira

Le but du cours est de décrire les espaces symétriques, les groupes semisimples réels sous-jacents, et leurs représentations. Les sujets abordés incluent : algèbres de Lie complexes, systèmes de racines, groupes de Lie réels, décomposition de Cartan, decomposition d'Iwasawa, théorie des représentations, théorème de Peter-Weyl.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

* **Théorie spectrale** (6 ECTS) par San Vũ Ngọc

Ce cours est un introduction aux opérateurs non bornés, qui généralisent les matrices aux espaces de dimension infinie. On discutera de leur spectre, et on appliquera les résultats théoriques aux opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels), souvent issus de la physique.

* **Analyse microlocale** (6 ECTS) par Zied Ammari

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

* **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Roger Lewandowski

La première partie du cours concerne les espaces de Sobolev. On montrera les théorèmes d'injection de Sobolev dans le cas d'ouverts assez généraux. On étudiera les espaces fractionnaires et la théorie des traces. La deuxième partie sera consacrée aux équations aux dérivées partielles elliptiques. Le cas linéaire sera d'abord considéré, avec différents types de conditions aux limites. Enfin, des techniques adaptées aux équations elliptiques non-linéaires seront introduites (méthodes de Galerkin, de point fixe, *etc.*).

* **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Miguel Rodrigues

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il s'agit d'une introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles d'évolution, menée sur l'exemple des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. L'essentiel du cours est consacré aux lois de conservation scalaires non linéaires, et en étudie à la fois les solutions fortes et entropiques, mais il aborde aussi les systèmes hyperboliques linéaires. En chemin, pour considérer les limites de viscosité évanescente, nous verrons quelques rudiments sur les systèmes paraboliques semi-linéaires.

* **Méthode des élements finis** (6 ECTS) par Nicolas Seguin

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'élaboration et l'analyse de ces méthodes sera abordé en dimension arbitraire. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Le cours inclut un travail pratique à réalisé en utilisant un des langages de programmation courants au choix (`Matlab`, `Octave`, `Scilab`, `Python`,...).

* **Numérique du transport** (6 ECTS) par Erwan Faou

Ce cours est le pendant numérique du cours *Équations hyperboliques*. Une première partie portera sur l'analyse des schémas de différences finies. Les problématiques de stabilité et de consistance pour de tels schémas considérés en domaine infini ou périodique ainsi qu'en domaine borné seront abordées. Dans un deuxième temps, l'approximation des solutions faibles entropiques de lois de conservation hyperboliques non-linéaires sera étudiée via la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis. Des développements récents de tels schémas seront abordés.

Second semestre.

* **Contrôlabilité et mécanique des fluides** (6 ECTS) par Frédéric Marbach

Dans ce cours, nous étudierons la notion de contrôlabilité, c'est-à-dire la possibilité de choisir certains paramètres d'une équation d'évolution (par exemple, une force appliquée au système) pour amener son état à une cible désirée. Le cours commencera par une introduction dans le cadre des ÉDO, où nous mettrons l'accent sur les résultats non linéaires, à l'aide de critères issus de la géométrie (crochets de Lie). Puis, nous considérerons des exemples de problèmes en mécanique des fluides régis par des ÉDP non linéaires. Nous aborderons ainsi la contrôlabilité des équations de Burgers et d'Euler.

* **Moyennisation théorique et numérique des équations fortement oscillantes** (6 ECTS) par Florian Méhats

Dans ce cours, il s'agit d'étudier des équations d'évolution (ÉDO ou ÉDP) oscillant rapidement en temps, lorsque le champ de vecteur est non autonome avec dépendance périodique par rapport au temps. Ce type de problèmes admet de nombreuses applications en physique, qui seront évoquées. Nous étudierons les techniques dites de moyennisation qui permettent de mettre la solution sous une forme très pratique : après un changement de variable périodique, cette fonction est la solution d'une équation moyennée, qui n'est plus raide en temps. Nous mettrons l'accent sur la moyennisation dite stroboscopique, qui permet de préserver les propriétés géométriques de l'équation (caractère hamiltonien ou préservation du volume). Enfin, dans une dernière partie, nous construirons une ou plusieurs méthodes numériques bien adaptées pour ces problèmes, dites uniformément précises et dont la convergence se fait uniformément par rapport au petit paramètre dans l'équation.

* **Contrôle optimal et solutions généralisées des équations d'Hamilton-Jacobi** (6 ECTS) par Piernicola Bettiol

Le cours présente les problèmes de contrôle optimal et leurs liens avec les équations d'Hamilton-Jacobi, *via* la notion de fonction valeur — qui associe à la condition initiale le meilleur coût de contrôle possible — et sa caractérisation comme solution unique de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Il étudie particulièrement comment l'analyse non lisse et la notion de solutions de viscosité fournissent des outils adaptés à ces questions.