Master 2 Mathématiques Fondamentales — Mathématiques & Applications

Université de Rennes — Année 2021-2022

Université de Bretagne Occidentale

M2 Mathématiques fondamentales

ANNÉE 2021-2022

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est [1]

Mihai Gradinaru `mihai.gradinaru@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

* **Aléatoire**, processus stochastiques, statistique, théorie ergodique, *etc.* **p.2**

  coordonné par [2] Mihai Gradinaru `mihai.gradinaru@univ-rennes1.fr`

* **Algèbre & Géométrie**, géométrie analytique, algèbre, arithmétique, singularités, *etc.* **p.5**

  coordonné par Christophe Dupont `christophe.dupont@univ-rennes1.fr`

* **Analyse & Applications**, équations aux dérivées partielles, analyse numérique, mécanique des fluides, *etc.* **p.8**

  coordonné par Miguel Rodrigues `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes1.fr`

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters rennais.

1. Jusque Septembre 2021. À partir de la rentrée, ce sera **Tobias Schmidt** `tobias.schmidt@univ-rennes1.fr`.
2. Cela est susceptible de changement à la rentrée 2021.

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Ying Hu

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

* **Systèmes dynamiques et théorie ergodique** (6 ECTS) par Christophe Cuny

L'objet du cours portera sur les systèmes dynamiques donnés par une transformation T mesurable sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ dont il préserve la mesure μ. De tels systèmes abondent, les exemples typiques incluant les translations par un nombre irrationnel sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou les éléments de $M_n(\mathbf{Z})$ agissant sur $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. L'objectif est d'étudier les propriétés statistiques de T^n quand $n \to \infty$. Les thèmes abordés seront : ergodicité, mélange, mélange fort ; théorèmes ergodiques ; unique ergodicité ; entropie.

* **Statistique des processus** (6 ECTS) par Nicolas Klutchnikoff

Ce cours traite de diverses procédures d'estimation pour des processus stochastiques à temps continu possédant des sauts. Nous considérons dans un premier temps les propriétés classiques des processus de comptage et de renouvellement, avant d'étudier plus en détail le processus de Poisson simple et ses généralisations comme les processus de Poisson inhomogènes et composés. Les processus de Markov à sauts purs sont également abordés d'un point de vue probabiliste et statistique. On donnera enfin pour terminer quelques méthodes d'estimation pour des modèles de solutions d'équations différentielles stochastiques.

* **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Gilles Stupfler

Ce cours est centré sur la question de l'estimation dans les modèles paramétriques, c'est-à-dire lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie. Le cours commencera par une exposition des méthodes classiques d'estimation pour ce type de modèle. On discutera ensuite de notions permettant de comparer les estimateurs paramétriques, ainsi que leur optimalité. Une ouverture vers le cadre semi-paramétrique, dans le cadre de la statistique des valeurs extrêmes, sera présentée.

* **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Marian Hristache

Dans ce cours, nous nous attachons à estimer des objets de dimension infinie tels qu'une densité de probabilité ou une fonction de régression. Le cours se décompose en trois parties. Nous passons tout d'abord en revue les méthodes principales d'estimation non-paramétrique telles que les méthodes à noyau, les estimateurs par projection et les méthodes de régularisation. Puis nous nous intéressons à l'optimalité des procédures et aux bornes indépassables de performance : c'est la théorie minimax. Enfin, en lien avec la théorie de l'apprentissage statistique, nous étudions des méthodes dites de sélection de modèles, permettant l'adaptation des estimateurs, ces derniers atteignants des vitesses optimales d'estimation sous diverses hypothèses sur les fonctions à estimer.

Second semestre.

* **Chemins rugueux** (6 ECTS) par Ismaël Bailleul

Un grand nombre de systèmes naturels sont décrits par des chemins à valeurs dans un espace de Banach ayant une dynamique décrite par des équations différentielles $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{h}_t$. Une telle équation traduit le fait que l'accroissement infinitésimal du chemin y est proportionnel à l'accroissement d'un signal h qui le conduit. Les équations élémentaires correspondent au cas où $h_t = t$, mais de nombreuses situations requièrent de considérer le cas de signaux h pas même dérivables ; c'est typiquement le cas qui se présente dans l'étude des équations différentielles stochastiques, où h est une trajectoire de mouvement brownien.
Comment alors donner un sens à l'équation ci-dessus ? La théorie des chemins rugueux fournit un cadre optimal pour répondre à de telles questions, dont le cadre d'application va des systèmes contrôlés, déterministes ou stochastiques, à l'étude d'ÉDPs avec bruit aléatoire et au *machine learning* ! Ce cours sera aux deux tiers purement déterministe et pourra à ce titre intéresser également tous les étudiants du parcours *Analyse.*

* **Processus stochastiques à sauts** (6 ECTS) par Mihai Gradinaru

Ce cours contiendra un grande partie d'introduction aux processus stochastiques ayant des sauts (essentiellement des processus de Lévy et si possible les subordinateurs) et au calcul stochastique associé, des ÉDS dirigées par des processus à sauts, *etc.* Dans une deuxième partie on donnera quelques exemples de modèles qui pourront reposer sur ce type de processus.

* **Zéros de processus gaussiens** (6 ECTS) par Jurgen Angst et Guillaume Poly

Nous commencerons par introduire les concepts principaux des champs Gaussiens aléatoires et quelques inégalités fonctionnelles classiques (Slepian, Sudakov, Fernique, isopérimétrique..). Ensuite nous étudierons des critères de régularité de ces processus, loi du maximum sur un compact, la loi du nombre d'extrema locaux ou la loi du nombre de zéros (volume des zéros si d>1) par les formules de Kac-Rice ou encore le développement en chaos de Wiener. Diverses applications seront proposées : polynômes trigonométriques aléatoires, différents modèles de polynômes algébriques ("Kac", "Elliptiques", "Flat"..)

* **deux cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI** :

** *Fouille du web et traitement du langage*

Ce cours est une introduction à la collecte de données textuelles et au traitement automatique du language.

** *Analyse des données fonctionnelles*

Dans ce cours les étudiants apprennent les idées principales, la théorie associée et les routines numériques de l'analyse des données fonctionnelles.

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

* **Dynamique arithmétique I** (6 ECTS) par Serge Cantat

* **Dynamique arithmétique II** (6 ECTS) par Serge Cantat

Le cours (I et II) présentera des méthodes arithmétiques, analytiques et p-adiques pour la théorie des groupes et les systèmes dynamiques. Les applications concerneront — la dynamique des transformations polynomiales et les phénomènes “d'intersections improbables” ; — les groupes linéaires et l'alternative de Tits ; — la distribution et la croissance arithmétique des orbites de transformations algébriques (hauteur de Tate, extensions du théorème de Skolem, Mahler et Lech, etc).

* **Surfaces de Riemann** (6 ECTS) par Franck Loray

Après quelques rappels sur les variétés, revêtements, nous introduirons la notion de variétés complexes et fonctions holomorphes. Les surfaces de Riemann sont les variétés complexes connexes de dimension 1 (surfaces réelles équipées d'une structure complexe).
Nous donnerons des exemples :
- la sphère de Riemann et ses automorphismes,
- les tores complexes, automorphismes et classification,
- les courbes algébriques définies sur les complexes.

Nous détaillerons le cas des courbes elliptiques, et leur loi de groupe.
Nous aborderons (sans le démontrer) le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe qui dit qu'une surface de Riemann admet pour revêtement universel le disque, le plan ou la sphère complexes. Nous verrons quelques conséquences.
Nous introduirons les notions de diviseur, de fibrés en droites et de groupe de Picard.
Nous introduirons les notions de faisceaux, et de cohomologie de Cech, pour arriver au théorème de Riemann-Roch.
Enfin, nous terminerons, si le temps le permet, par l'application d'Abel-Jacobi.

* **Géométrie complexe** (6 ECTS) par Benoît Claudon

Ce cours est la suite logique de celui de "Surfaces de Riemann". L'objectif principal de ce cours est de démontrer le théorème de plongement de Kodaira qui caractérise complètement les variétés projectives lisses parmi les variétés complexes compactes en termes d'existence de certaines fibrés en droites. Pour ce faire, nous aborderons les points suivants :
-calcul différentiel complexe et cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels holomorphes
-métriques hermitiennes sur les variétés complexes, cas des métriques kählériennes
-notion de connexion sur un fibré vectoriel, connexion de Chern d'un fibré holomorphe hermitien
-Laplaciens et théorie de Hodge
-fibrés en droites amples/positifs et théorèmes d'annulation.

* **Groupes et algèbres de Lie I** (6 ECTS) par François Maucourant & Barbara Schapira

Les mots clés de la première partie : définition des groupes et algèbres de Lie, exemples classiques ; représentations de sl(2,C) et sl(3,C) ; algèbres de Lie résolubles, nilpotentes, semi-simples ; sous-algèbres de Cartan.

* **Groupes et algèbres de Lie II** (6 ECTS) par François Maucourant & Barbara Schapira

Les mots clés de cette deuxième partie : systèmes de racines, groupe de Weyl, diagrammes de Dynkin ; liens entre algèbres de Lie réelles et complexes ; décomposition de Cartan ; lien entre groupes et algèbres de Lie. retour sur les représentations.

Second semestre.

* **Équations différentielles algébriques** (6 ECTS) par Guy Casale

Ce cours est une introdution à la theorie de Galois des équations differentielles presentées de manière géometrique via la notion de feuilletage.
1 - Etude locale en un point régulier, théorème de Cauchy. Notion de feuilletage : théorème de Frobenius.
2- Théorie de Galois différentielle
- approche algébrique via les extensions de corps différentiels
- traduction géométrique via la réduction du groupe d'une connexions principales
3 - Equations differentielles linéaire sur une surface de Riemann
- étude des singularités régulières (et irrégulières)
- representation de monodromy (et phénomènes de Stokes)
- théorème de densité de Schlessinger (et théorème de densité de Ramis)
4 - Exemples : équation du second ordre
- Equations hypergeometriques
- Famille de Legendre et son équation de Picard-Fuchs
- Structure projective sur une courbe algébrique complexe.

* **Systèmes dynamiques hyperboliques** (6 ECTS) par Sébastien Gouëzel

Les systèmes dynamiques hyperboliques sont l'exemple le plus simple (et le mieux compris) de systèmes dynamiques chaotiques : il s'agit de transformations sur un espace compact qui, en chaque point, dilatent uniformément une direction et contractent uniformément une direction supplémentaire. L'étude de ces transformations combine des arguments provenant de différents domaines des mathématiques (principalement géométrie, mais également analyse, probabilités, algèbre, combinatoire). On couvrira les propriétés fondamentales de ces systèmes (existence de variétés stables et instables, stabilité structurelle, recollement d'orbites, partitions de Markov), avant de s'intéresser à des théorèmes plus avancés : classification des difféomorphismes d'Anosov à homéomorphisme près, sur les tores et plus généralement sur les nilvariétés ; absolue continuité des feuilletages, ergodicité ; croissance du nombre d'orbites périodiques (théorème de Margulis).

* **Introduction à la géométrie torique** (6 ECTS) par Carl Tipler

Dans ce cours, on étudiera les variétés qui sont obtenues par compactification d'un tore complexe. On donnera leur description combinatoire en terme d'éventails, établissant un lien entre la géométrie des objets convexes (cônes, polytopes, etc) et la géométrie algébrique. On étudiera par la suite les diviseurs et faisceaux cohérents de ces variétés, en particulier leur cohomologie. Enfin, si le temps le permet, le cours s'orientera vers l'étude des singularités toriques et leurs résolutions.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

* **Théorie spectrale** (6 ECTS) par San Vũ Ngọc

Ce cours est un introduction aux opérateurs non bornés, qui généralisent les matrices aux espaces de dimension infinie. On discutera de leur spectre, et on appliquera les résultats théoriques aux opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels), souvent issus de la physique.

* **Analyse microlocale** (6 ECTS) par Christophe Cheverry

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

* **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Miguel Rodrigues

La première partie du cours concerne les espaces de Sobolev. On montrera les théorèmes d'injection de Sobolev dans le cas d'ouverts assez généraux. On étudiera les espaces fractionnaires et la théorie des traces. La deuxième partie sera consacrée aux équations aux dérivées partielles elliptiques. Le cas linéaire sera d'abord considéré, avec différents types de conditions aux limites. Enfin, des techniques adaptées aux équations elliptiques non-linéaires seront introduites (méthodes de Galerkin, de point fixe, *etc.*).

* **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Vincent Duchêne

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il s'agit d'une introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles d'évolution, menée sur l'exemple des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. L'essentiel du cours est consacré aux lois de conservation scalaires non linéaires, et en étudie à la fois les solutions fortes et entropiques, mais il aborde aussi les systèmes hyperboliques linéaires. En chemin, pour considérer les limites de viscosité évanescente, nous verrons quelques rudiments sur les systèmes paraboliques semi-linéaires.

* **Méthode des élements finis** (6 ECTS) par Roger Lewandowski et Nicolas Seguin

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'élaboration et l'analyse de ces méthodes sera abordé en dimension arbitraire. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Le cours inclut un travail pratique à réalisé en utilisant un des langages de programmation courants au choix (`Matlab`, `Octave`, `Scilab`, `Python`,...).

* **Numérique du transport** (6 ECTS) par Erwan Faou

Ce cours est le pendant numérique du cours *Équations hyperboliques*. Une première partie portera sur l'analyse des schémas de différences finies. Les problématiques de stabilité et de consistance pour de tels schémas considérés en domaine infini ou périodique ainsi qu'en domaine borné seront abordées. Dans un deuxième temps, l'approximation des solutions faibles entropiques de lois de conservation hyperboliques non-linéaires sera étudiée via la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis. Des développements récents de tels schémas seront abordés.

Second semestre.

* **Contrôlabilité et mécanique des fluides** (6 ECTS) par Frédéric Marbach

Dans ce cours, nous étudierons la notion de contrôlabilité, c'est-à-dire la possibilité de choisir certains paramètres d'une équation d'évolution (par exemple, une force appliquée au système) pour amener son état à une cible désirée. Le cours commencera par une introduction dans le cadre des ÉDO, où nous mettrons l'accent sur les résultats non linéaires, à l'aide de critères issus de la géométrie (crochets de Lie). Puis, nous considérerons des exemples de problèmes en mécanique des fluides régis par des ÉDP non linéaires. Nous aborderons ainsi la contrôlabilité des équations de Burgers et d'Euler.

* **Méthodes numériques pour les équations cinétiques** (6 ECTS) par Nicolas Crouseille

Dans ce cours, il s'agira d'étudier les équations cinétiques et leur approximation numérique. Ces équations microscopiques permettent de décrire un système composé d'un grand nombre de particules et admettent de nombreuses applications en physique des plasmas, biologie, astrophysique,... Dans un premier temps, des aspects de modélisation seront abordés. Certaines propriétés des équations cinétiques seront mises en évidence et à partir de développements asymptotiques (par rapport à un petit paramètre dans l'équation), des modèles macroscopiques connus (comme les équations d'Euler ou de diffusion) seront obtenus. Dans un second temps, plusieurs méthodes numériques adaptées aux équations cinétiques seront construites et analysées. En particulier, des méthodes dites multi-échelles, permettant de faire le lien au niveau discret entre les descriptions microscopique et macroscopique seront présentées.

* **Contrôle optimal et solutions généralisées des équations d'Hamilton-Jacobi** (6 ECTS) par Piernicola Bettiol

Le cours présente les problèmes de contrôle optimal et leurs liens avec les équations d'Hamilton-Jacobi, *via* la notion de fonction valeur — qui associe à la condition initiale le meilleur coût de contrôle possible — et sa caractérisation comme solution unique de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Il étudie particulièrement comment l'analyse non lisse et la notion de solutions de viscosité fournissent des outils adaptés à ces questions.