
M2 Mathématiques fondamentales

ANNÉE 2019-2020

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

Miguel Rodrigues `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue).

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Jürgen Angst

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

* **Systèmes dynamiques et théorie ergodique** (6 ECTS) par Bachir Bekka

L'objet du cours portera sur les systèmes dynamiques donnés par une transformation T mesurable sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ dont il préserve la mesure μ. De tels systèmes abondent, les exemples typiques incluant les translations par un nombre irrationnel sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou les éléments de $M_n(\mathbf{Z})$ agissant sur $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. L'objectif est d'étudier les propriétés statistiques de T^n quand $n \to \infty$. Les thèmes abordés seront : ergodicité, mélange, mélange fort ; théorèmes ergodiques ; unique ergodicité ; entropie.

* **Statistique des processus** (6 ECTS) par Ronan Le Guével

Ce cours traite de diverses procédures d'estimation pour des processus stochastiques à temps continu possédant des sauts. Nous considérons dans un premier temps les propriétés classiques des processus de comptage et de renouvellement, avant d'étudier plus en détail le processus de Poisson simple et ses généralisations comme les processus de Poisson inhomogènes et composés. Les processus de Markov à sauts purs sont également abordés d'un point de vue probabiliste et statistique. On donnera enfin pour terminer quelques méthodes d'estimation pour des modèles de solutions d'équations différentielles stochastiques.

* **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Bernard Delyon

Ce cours s'intéresse d'abord aux méthodes classiques d'estimation pour les modèles paramétriques — lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie —, en particulier dans le cas d'observations dépendantes. Différentes notions de comparaison d'estimateurs sont ensuite discutées, ainsi que la question de leur optimalité.

* **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Adrien Saumard

> Dans ce cours, nous nous attachons à estimer des objets de dimension infinie tels qu'une densité de probabilité ou une fonction de régression. Le cours se décompose en trois parties. Nous passons tout d'abord en revue les méthodes principales d'estimation non-paramétrique telles que les méthodes à noyau, les estimateurs par projection et les méthodes de régularisation. Puis nous nous intéressons à l'optimalité des procédures et aux bornes indépassables de performance : c'est la théorie minimax. Enfin, en lien avec la théorie de l'apprentissage statistique, nous étudions des méthodes dites de sélection de modèles, permettant l'adaptation des estimateurs, ces derniers atteignants des vitesses optimales d'estimation sous diverses hypothèses sur les fonctions à estimer.

Second semestre.

* **Asymptotique des processus de Markov** (6 ECTS) par Brice Franke

> Le cours s'intéresse à l'asymptotique en temps long des processus de Markov. Les notions abordées incluent : récurrence, transience, mesure invariante, *etc.*

* **Chemins rugueux** (6 ECTS) par Ismaël Bailleul

> Un grand nombre de systèmes naturels sont décrits par des chemins à valeurs dans un espace de Banach ayant une dynamique décrite par des équations différentielles $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{h}_t$. Une telle équation traduit le fait que l'accroissement infinitésimal du chemin y est proportionnel à l'accroissement d'un signal h qui le conduit. Les équations élémentaires correspondent au cas où $h_t = t$, mais de nombreuses situations requièrent de considérer le cas de signaux h pas même dérivables ; c'est typiquement le cas qui se présente dans l'étude des équations différentielles stochastiques, où h est une trajectoire de mouvement brownien.
> Comment alors donner un sens à l'équation ci-dessus ? La théorie des chemins rugueux fournit un cadre optimal pour répondre à de telles questions, dont le cadre d'application va des systèmes contrôlés, déterministes ou stochastiques, à l'étude d'ÉDPs avec bruit aléatoire et au *machine learning* ! Ce cours sera aux deux tiers purement déterministe et pourra à ce titre intéresser également tous les étudiants du parcours *Analyse.*

* **Jeux à champ moyen** (6 ECTS) par Hu Ying

> Les jeux à champ moyen décrivent l'évolution en temps continu d'un grand nombre d'agents interagissant entre eux. Introduits par Lasry et Lions, les modèles étudiés dans ce cours ont à voir avec divers problèmes d'optimisation, d'équations aux dérivées partielles (Hamilton–Jacobi, Fokker-Planck, *etc.*), d'analyse stochastique (équations différentielles stochastiques rétrogrades) ou de théorie des jeux.

* **deux cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI** :
  ** *Filtrages linéaire et non linéaires & Modèles avancés d'ingénierie financière*
  ** *Méthodes modernes d'apprentissage : machine learning & deep learning*

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

* **Analyse complexe en plusieurs variables** (6 ECTS) par Christophe Dupont

Le cours commence par introduire les fonctions holomorphes et les fonctions pluri-sous-harmoniques sur les ouverts de $\mathbf{C}^n$. On s'intéressera ensuite à des questions de prolongement. On étudiera en particulier les fonctions holomorphes (phénomène de Hartogs, domaines d'holomorphie, domaines pseudoconvexes, problème de Levi), les sous-ensembles analytiques (théorème de préparation de Weierstrass, théorème de Remmert-Stein) et les courants d'intégration sur les sous-ensembles analytiques (théorème de Lelong).

* **Géométrie complexe** (6 ECTS) par Benoît Claudon

Ce cours fait suite à celui d'*analyse complexe en plusieurs variables*. Son objectif est d'introduire certaines notions de base de la géométrie complexe : variétés complexes, fibrés vectoriels holomorphes et métriques hermitiennes sur ces objets. La notion de formes différentielles de type (p, q) (propre à la géométrie complexe) permet de définir des groupes de cohomologie (avatar complexe de la cohomologie de De Rham) dits de Dolbeault. Nous verrons comment la positivité d'une métrique s'incarne dans ce contexte : théorème d'annulation (pour la cohomologie) et de plongement de Kodaira dans le cas des métriques sur les fibrés en droites ; décomposition de Hodge pour les métriques kählériennes.

* **Théorie de l'intersection en géométrie algébrique I** (6 ECTS) par Julien Sebag

Dans ce premier cours, nous présenterons les ingrédients algébriques importants pour le développement de la théorie de l'intersection en géométrie algébrique. Le cours suivra le programme suivant : Introduction ; Notions de base en algèbre commutative ; Anneaux et modules noethériens et artiniens ; Théorie algébrique de la dimension ; Anneaux réguliers ; Flitrations, graduations, polynômes de Hilbert-Samuel.

* **Théorie de l'intersection en géométrie algébrique II** (6 ECTS) par Florian Ivorra

Ce second cours développe le point de vue géométrique sur la théorie de l'intersection en géométrie algébrique.

* **Fondements de la géométrie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

* **Topologie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

Ces cours forment une paire de cours complémentaires.
Le premier commencera par discuter des concepts de base de la topologie différentielle, par exemple ce qu'est une variété, un fibré, ou une carte lisse entre les variétés. Nous donnerons des exemples montrant que de tels objets apparaissent naturellement.
Le second se concentrera ensuite sur les formes différentielles et la cohomologie de de Rham, prouvant qu'il s'agit d'un invariant topologique, le calculant dans quelques cas, et obtenant certaines des applications standard telles que le théorème de point fixe de Browder.
Pour conclure la classe, nous discuterons de la position générale et de certaines de ses applications telles que le théorème de plongement de Whitney ou la formule de Hopf. Si le temps le permet nous discuterons aussi de la notion de degré, tant du point de vue de la cohomologie de De Rham que du point de vue de la position générale.

Second semestre.

* **Géométrie algébrique réelle** (6 ECTS) par Goulwen Fichou

Les objets de la géométrie algébrique réelle sont naturellement des sous-ensembles d'un espace affine $\mathbf{R}^n$, déterminés par l'annulation d'un — seul ! — polynôme. L'étude de ces ensembles mêle alors propriétés algébriques (de type Nullstellensatz) et topologiques. Ces ensembles viennent naturellement avec des anneaux de fonctions, qui permettent de refléter ces propriétés : des fonctions polynomiales bien sûr, mais plus généralement des fonctions de Nash (analytiques et vérifiant une équation polynômiale à coefficients polynomiaux), ou encore des fonctions analytiques par arcs (analytiques). Certains de ces anneaux sont noethériens, d'autres pas, mais tous permettent de mieux comprendre les ensembles algébriques réels.

* **Déformations des variétés complexes** (6 ECTS) par Christophe Mourougane

Le but de ce cours est de définir et d'étudier les espaces de paramètres de déformations universelles de variétés complexes compactes. Il sera l'occasion de donner un large éventail d'exemples de variétés complexes, d'introduire pour les utiliser les notions de faisceaux et de leur cohomologie qui permettent de globaliser des objets définis localement, de définir des notions de géométrie hermitienne qui permettent de passer de la géométrie formelle à la géométrie analytique, et si le temps le permet d'expliquer sur des exemples des phénomènes de dégénérescence.

* **Géométrie semi-riemannienne & calcul des variations** (6 ECTS) par Éric Loubeau

Le cours fournira un cadre commun aux géométries riemanniennes et lorentziennes en étudiant les notions classiques de géométrie semi-riemannienne : métriques semi-riemanniennes, transport parallèle, connexion, courbure, champs de Killing, géodésiques, *etc.* Il présentera en particulier le problème des géodésiques sous forme variationnelle. Pour conclure il discutera les applications harmoniques sur les variétés riemanniennes.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

* **Théorie spectrale** (6 ECTS) par Christophe Cheverry

Le cours vise à présenter les outils fondamentaux de la théorie spectrale et à l'illustrer à l'aide d'exemples issus de différentes branches de la physique. Il fournit également une introduction générale aux opérateurs non bornés.

* **Analyse microlocale** (6 ECTS) par Zied Ammari

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

* **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Roger Lewandowski

La première partie du cours concerne les espaces de Sobolev. On montrera les théorèmes d'injection de Sobolev dans le cas d'ouverts assez généraux. On étudiera les espaces fractionnaires et la théorie des traces. La deuxième partie sera consacrée aux équations aux dérivées partielles elliptiques. Le cas linéaire sera d'abord considéré, avec différents types de conditions aux limites. Enfin, des techniques adaptées aux équations elliptiques non-linéaires seront introduites (méthodes de Galerkin, de point fixe, *etc.*).

* **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Miguel Rodrigues

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il étudie d'abord les solutions entropiques des lois de conservations scalaires puis il se focalise sur les solutions fortes des systèmes hyperboliques quasi-linéaires.

* **Méthode des élements finis** (6 ECTS) par Éric Darrigrand & Nicolas Seguin

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'élaboration et l'analyse de ces méthodes sera abordé dans les cas unidimensionnel et bidimensionnels. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Un travail de programmation est réalisé sous `Matlab` ou `Octave`.

* **Numérique du transport** (6 ECTS) par Benjamin Boutin & Mohammed Lemou

Ce cours est un pendant numérique du cours *Équations hyperboliques.* D'une part il discute la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis appliquée aux lois de conservation scalaires. On y étudie en outre les extensions éventuelles au cas des systèmes de lois de conservation et au cadre multidimensionnel. D'autre part il présente les schémas semi-lagrangiens et les méthodes particulaires bien adaptés aux équations de transport, notamment à l'équation de Vlasov intervenant dans la modélisation cinétique de la dynamique des plasmas.

Second semestre.

* **Modélisation et analyse mathématique des écoulements peu profonds à surface libre** (6 ECTS) par Vincent Duchêne

Dans ce cours, on discutera de problématiques de modélisation dans le cadre de l'océanographie côtière. Plus précisément, on expliquera comment justifier rigoureusement les systèmes de Saint-Venant, Green-Naghdi et consort à partir des équations d'Euler à surface libre dans l'asymptotique du régime d'eaux peu profondes. Ce sera l'occasion de mettre en œuvre et d'adapter des outils vus au premier semestre sur les équations elliptiques et hyperboliques, ainsi que d'introduire quelques notions et mots-clés : équations hamiltoniennes, équations dispersives, *etc.*

* **Moyennisation théorique et numérique des équations fortement oscillantes** (6 ECTS) par Florian Méhats

Dans ce cours, il s'agit d'étudier des équations d'évolution (ÉDO ou ÉDP) oscillant rapidement en temps, lorsque le champ de vecteur est non autonome avec dépendance périodique par rapport au temps. Ce type de problèmes admet de nombreuses applications en physique, qui seront évoquées. Nous étudierons les techniques dites de moyennisation qui permettent de mettre la solution sous une forme très pratique : après un changement de variable périodique, cette fonction est la solution d'une équation moyennée, qui n'est plus raide en temps. Nous mettrons l'accent sur la moyennisation dite stroboscopique, qui permet de préserver les propriétés géométriques de l'équation (caractère hamiltonien ou préservation du volume). Enfin, dans une dernière partie, nous construirons une ou plusieurs méthodes numériques bien adaptées pour ces problèmes, dites uniformément précises et dont la convergence se fait uniformément par rapport au petit paramètre dans l'équation.

* **Contrôle optimal avec incertitude et équations d'Hamilton-Jacobi** (6 ECTS) par Marc Quincampoix

Le cours présente les problèmes de contrôle optimal et leurs liens avec les équations d'Hamilton-Jacobi. Il étudie également comment modéliser l'incertitude sur les conditions initiales et explique comment la notion de solutions de viscosité et le transport optimal fournissent des outils adaptés à ces questions.