
M2 Mathématiques fondamentales

ANNÉE 2018-2019

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

Miguel Rodrigues `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

- * **Aléatoire**, processus stochastiques, statistique, théorie ergodique, *etc.* p.2
coordonné par Jean-Christophe Breton `jean-christophe.breton@univ-rennes1.fr`

- * **Algèbre & Géométrie**, géométrie analytique, algèbre, arithmétique, singularités, *etc.* p.4
coordonné par Christophe Dupont `christophe.dupont@univ-rennes1.fr`

- * **Analyse & Applications**, équations aux dérivées partielles, analyse numérique, mécanique des fluides, *etc.* p.6
coordonné par Nicolas Seguin `nicolas.seguin@univ-rennes1.fr`

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue).

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

- * **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

- * **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Jürgen Angst

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

- * **Propriétés stochastiques des systèmes dynamiques** (6 ECTS) par Françoise Pène

Le cours étudie différentes propriétés des systèmes dynamiques probabilisés telles que l'ergodicité, le mélange, l'existence de variance asymptotique, l'établissement de théorèmes de type central limite. Il s'intéresse également à la construction de mesures de probabilité invariantes.

- * **Statistique des processus** (6 ECTS) par Ronan Le Guével

Le cours aborde diverses procédures d'estimation et de tests pour certains types de processus stochastiques à temps continu, notamment ceux de renouvellement, de Poisson, de Markov, et enfin ceux de diffusion.

- * **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Bernard Delyon

Ce cours s'intéresse d'abord aux méthodes classiques d'estimateurs pour les modèles paramétriques — lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie —, puis à différentes notions de comparaison d'estimateurs et à la recherche d'un estimateur optimal associé à une expérience statistique.

- * **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Adrien Saumard

Après une introduction aux méthodes d'estimation d'une densité ou d'une régression, le cours se concentre sur les estimateurs non paramétriques construits à l'aide d'un noyau et propose quelques applications de ces méthodes à l'inférence statistique.

Second semestre.

* **Modèles stochastiques, continus ou à sauts** (6 ECTS)

par Mihai Gradinaru

Ce cours est divisé en deux parties. D'une part, il propose une introduction aux processus stochastiques à sauts (essentiellement des processus de Lévy) et au calcul stochastique associé. D'autre part, il étudie quelques exemples de modèles stochastiques inspirés de la dynamique de populations, de la dynamique dans des potentiels, *etc.*

* **Chemins rugueux** (6 ECTS)

par Ismaël Bailleul

Ce cours porte sur les équations différentielles contrôlées par des chemins peu réguliers, en particulier pouvant avoir l'irrégularité d'une trajectoire typique de mouvement brownien.

* **Jeux à champ moyen** (6 ECTS)

par Hu Ying

Les jeux à champ moyen décrivent l'évolution en temps continu d'un grand nombre d'agents interagissant entre eux. Introduits par Lasry et Lions, les modèles étudiés dans ce cours ont à voir avec divers problèmes d'optimisation, d'équations aux dérivées partielles (Hamilton–Jacobi, Fokker-Planck, *etc.*), d'analyse stochastique (équations différentielles stochastiques rétrogrades) ou de théorie des jeux.

* **deux cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI**

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

- * **Introduction à la géométrie algébrique** (6 ECTS) par Bernard Le Stum

Le cours présente d'abord les notions de foncteurs adjoints en les illustrant avec de nombreux exemples. Il donne ensuite la définition formelle d'un (pré)-faisceau sur un espace topologique à valeur dans une catégorie, puis la notion d'espace localement annelé en l'illustrant par les notions de variétés topologique, complexe ou différentiable.

- * **Schémas** (6 ECTS) par Bernard Le Stum

Faisant suite au cours d'*Introduction à la géométrie algébrique*, ce cours commence par étudier les notions de spectres premier (et maximal) d'un anneau, puis construit la catégorie des schémas et l'illustre par les notions de variétés (et schémas) projectifs. Il étudie ensuite les propriétés fondamentales des schémas et en particulier celles de morphisme propre ainsi que de morphisme lisse.

- * **Introduction aux courbes algébriques** (6 ECTS) par Christophe Ritzenthaler

- * **Application des courbes algébriques** (6 ECTS) par Christophe Ritzenthaler
à la cryptographie et aux codes correcteurs d'erreurs

L'objectif de cette paire de cours est de présenter les éléments fondamentaux de géométrie algébrique et de théorie des invariants à la base de l'étude des courbes algébriques et ceci à travers quelques grands thèmes : comment décrire toutes les courbes ? Comment savoir si deux courbes sont isomorphes ? Quel est le nombre maximal de points rationnels d'une courbe sur un corps fini ? Des TP permettront une approche concrète des objets introduits et dans un second temps des élargissements vers les applications telles que la cryptographie ou la théorie des codes.

- * **Fondements de la géométrie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

L'objectif de ce cours est de discuter les objets fondamentaux de la géométrie différentielle : variétés (topologiques, lisses, complexes, projectives, *etc.*), quotients, sections, fibrés, faisceaux, *etc.*

- * **Topologie différentielle** (6 ECTS) par Juan Souto

Faisant suite au cours de *Fondements de la géométrie différentielle*, ce cours s'attache à des questions classiques de topologie différentielle. On y introduit les notions de formes différentielles et de cohomologie de de Rham, ainsi que le lemme de Poincaré et le théorème de Mayer Vietoris. On y démontre ensuite : le théorème de Sard, celui de plongement de Whitney, la formule d'indice de Hopf pour le calcul de la caractéristique d'Euler, *etc.* Enfin on y discute de la notion de degré topologique.

Second semestre.

* **Géométrie algébrique réelle** (6 ECTS)

par Goulwen Fichou

Les objets de la géométrie algébrique réelle sont naturellement des sous-ensembles d'un espace affine \mathbf{R}^n , déterminés par l'annulation d'un — seul! — polynôme. L'étude de ces ensembles mêle alors propriétés algébriques (de type Nullstellensatz) et topologiques. Ces ensembles viennent naturellement avec des anneaux de fonctions, qui permettent de refléter ces propriétés : des fonctions polynomiales bien sûr, mais plus généralement des fonctions de Nash (analytiques et vérifiant une équation polynomiale à coefficients polynomiaux), ou encore des fonctions analytiques par arcs (analytiques). Certains de ces anneaux sont noethériens, d'autres pas, mais tous permettent de mieux comprendre les ensembles algébriques réels.

* **Théorie géométrique des groupes** (6 ECTS)

par Rémi Coulon

Ce cours est une introduction à la théorie géométrique des groupes. L'idée centrale est d'étudier la structure d'un groupe (infini) en le regardant non pas comme un objet algébrique mais plutôt comme une créature géométrique. Cette branche des mathématiques a des connexions très riches avec d'autres domaines tels que la topologie algébrique, la théorie des représentations, la théorie ergodique, *etc.* Durant le cours, on abordera entre autres les notions de quasi-isométrie, d'espace hyperbolique au sens de Gromov et de théorie de la petite simplification.

* **Géométrie semi-riemannienne & calcul des variations** (6 ECTS)

par Éric Loubeau

Le cours fournira un cadre commun aux géométries riemanniennes et lorentziennes en étudiant les notions classiques de géométrie semi-riemannienne : métriques semi-riemanniennes, transport parallèle, connexion, courbure, champs de Killing, géodésiques, *etc.* Il présentera en particulier le problème des géodésiques sous forme variationnelle. Pour conclure il discutera les applications harmoniques sur les variétés riemanniennes.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

- * **Théorie spectrale** (6 ECTS) par Nicolas Raymond

Le cours présente d'abord les concepts nécessaires à l'étude des opérateurs non bornés, avant de développer les éléments fondamentaux de leur théorie spectrale. Une attention particulière est portée à l'étude spectrale des opérateurs différentiels.

- * **Analyse microlocale** (6 ECTS) par San Vũ Ngọc

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

- * **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Nicoletta Tchou

Le cours étudie d'abord les espaces de Sobolev et les équations elliptiques linéaires. Il se termine par une initiation aux techniques adaptées aux équations elliptiques non linéaires.

- * **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Florian Méhats

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il étudie d'abord les systèmes hyperboliques linéaires, puis il se focalise sur les solutions entropiques des lois de conservations scalaires.

- * **Méthode des éléments finis** (6 ECTS) par Éric Darrigrand & Nicolas Seguin

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'extension aux problèmes mixtes est aussi abordée. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Un travail de programmation est réalisé sous `Matlab` ou `Octave`.

- * **Numérique du transport** (6 ECTS) par Mohammed Lemou & Nicolas Seguin

Ce cours est un pendant numérique du cours *Équations hyperboliques*. D'une part il discute la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis appliquée aux lois de conservation scalaires. On y étudie en outre les extensions éventuelles au cas des systèmes de lois de conservation et au cadre multidimensionnel. D'autre part il présente les schémas semi-lagrangiens et les méthodes particulières, bien adaptés aux équations de transport, notamment à l'équation de Vlasov intervenant dans la modélisation cinétique de la dynamique des plasmas.

Second semestre.

- * **Modélisation et analyse mathématique des écoulements peu profonds à surface libre** (6 ECTS) par Vincent Duchêne

Le cours discutera l'obtention à partir des équations d'Euler à surface libre de modèles asymptotiques pour les vagues peu profondes, en particulier ceux de type Green-Naghdi. Il en proposera ensuite une analyse détaillée.

- * **Analyse numérique des équations aux dérivées partielles hamiltoniennes** (6 ECTS) par Erwan Faou

Dans ce cours, on étudiera l'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles possédant de fortes propriétés géométriques liées à une structure symplectique. L'équation de Schrödinger, ainsi que certains types d'équations de transport non linéaires seront étudiés en détail. On passera en revue différentes méthodes d'approximation en espace et en temps, et discutera de la préservation des propriétés qualitatives des équations par ces schémas numériques.

- * **Contrôle optimal et équations d'Hamilton-Jacobi** (6 ECTS) par Marc Quincampoix

Le cours présente les problèmes de contrôle optimal et leurs liens avec les équations d'Hamilton-Jacobi. Il étudie également comment modéliser l'incertitude sur les conditions initiales et explique comment la notion de solutions de viscosité et le transport optimal fournissent des outils adaptés à ces questions.