

---

**M2 Mathématiques fondamentales**

ANNÉE 2017-2018

---

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

**Miguel Rodrigues**                      `luis-miguel.rodrigues@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

- \* **Aléatoire**, processus stochastiques, statistique, théorie ergodique, *etc.* **p.2**  
coordonné par Jean-Christophe Breton                      `jean-christophe.breton@univ-rennes1.fr`
  
- \* **Algèbre & Géométrie**, géométrie analytique, algèbre, arithmétique, singularités, *etc.* **p.4**  
coordonné par Christophe Dupont                      `christophe.dupont@univ-rennes1.fr`
  
- \* **Analyse & Applications**, équations aux dérivées partielles, analyse numérique, mécanique des fluides, *etc.* **p.6**  
coordonné par Nicolas Seguin                      `nicolas.seguin@univ-rennes1.fr`

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant entre deux et quatre cours de 24h pour 6 ECTS ou 48h pour 12 ECTS d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différents parcours, voire dans un autre master. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue).

# Thématique « aléatoire »

## Premier semestre.

- \* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Jürgen Angst

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

- \* **Estimation paramétrique** (6 ECTS) par Bernard Delyon

Ce cours s'intéresse d'abord aux méthodes classiques d'estimateurs pour les modèles paramétriques — lorsque la loi inconnue est décrite par un paramètre de dimension finie —, puis à différentes notions de comparaison d'estimateurs et à la recherche d'un estimateur optimal associé à une expérience statistique.

- \* **Estimation non paramétrique** (6 ECTS) par Adrien Saumard

Après une introduction aux méthodes d'estimation d'une densité ou d'une régression, le cours se concentre sur les estimateurs non paramétriques construits à l'aide d'un noyau et propose quelques applications de ces méthodes à l'inférence statistique.

- \* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

- \* **Propriétés stochastiques des systèmes dynamiques** (6 ECTS) par Françoise Pène

Le cours étudie différentes propriétés des systèmes dynamiques probabilisés telles que l'ergodicité, le mélange, l'existence de variance asymptotique, l'établissement de théorèmes de type central limite. Il s'intéresse également à la construction de mesures de probabilité invariantes.

- \* **Statistique des processus** (6 ECTS) par Ronan Le Guével

Le cours aborde diverses procédures d'estimation et de tests pour certains types de processus stochastiques à temps continu, notamment ceux de renouvellement, de Poisson, de Markov, et enfin ceux de diffusion.

## Second semestre.

- \* **Fondements mathématiques de la mécanique quantique** (6 ECTS) par Dimitri Pétritis

Ce cours présente le formalisme de la mécanique quantique et certains outils mathématiques associés (algèbres d'opérateurs, probabilités non commutatives, logique quantique, *etc.*).

- \* **Méthode de Stein et calcul de Malliavin** (6 ECTS) par Guillaume Poly

La méthode de Stein est une technique permettant d'établir et de quantifier un théorème limite en loi. Le calcul de Malliavin est un calcul variationnel sur les fonctionnelles d'un mouvement Brownien. Ce cours les introduit puis les combine pour produire un outil redoutablement efficace.

- \* **Modèles stochastiques, continus ou à sauts** (6 ECTS) par Mihai Gradinaru

Ce cours est divisé en deux parties. D'une part, il propose une introduction aux processus stochastiques à sauts (essentiellement des processus de Lévy) et au calcul stochastique associé. D'autre part, il étudie quelques exemples de modèles stochastiques inspirés de la dynamique de populations, de la dynamique dans des potentiels, *etc.*

# Thématique « algèbre et géométrie »

## Premier semestre.

- \* **Géométrie & arithmétique des courbes algébriques** (6 ECTS) par Christophe Ritzenthaler — **une approche effective**

Dans ce cours, on présente les éléments fondamentaux de géométrie algébrique et de théorie des invariants à la base de l'étude des courbes algébriques et ceci à travers quelques grands thèmes : comment décrire toutes les courbes ? Comment savoir si deux courbes sont isomorphes ? Quel est le nombre maximal de points rationnels d'une courbe sur un corps fini ? Des TP permettront une approche concrète des objets introduits et des élargissements vers les applications telles que la cryptographie ou la théorie des codes.

- \* **Géométrie hyperbolique** (6 ECTS) par Ludovic Marquis

Dans ce cours on étudie les sous-groupes discrets du groupe des isométries de l'espace hyperbolique. En particulier, on introduit l'espace hyperbolique puis les notions d'ensemble limite et de domaine de discontinuité. On exhibe aussi des exemples de sous-groupes discrets via des constructions arithmétiques ou géométriques. On étudie enfin l'espace des géométries sur une surface : l'espace de Teichmüller.

- \* **Itération** (6 ECTS) par Dominique Cerveau

Ce cours étudie la dynamique des transformations holomorphes de la sphère de Riemann, avec en particulier la description des ensembles de Julia, Fatou et Mandelbrot. Ceci nécessite un peu d'analyse complexe classique et de dynamique locale élémentaire.

- \* **Théorie des valuations** (6 ECTS) par Bernard Le Stum

La notion de valuation remonte à Kummer et Jacobi qui les utilisaient comme substitut aux nombres premiers pour résoudre des problèmes d'arithmétique. De même, Zariski et Nagata s'en sont servis comme points supplémentaires pour désingulariser les variétés algébriques. Elles sont revenues sous les feux de la rampe avec les travaux de Scholze sur les perfectoides. On se familiarisera avec ces valuations et verra comment on peut les rassembler dans des espaces analogues à ceux utilisés habituellement en géométrie (et en arithmétique).

## Second semestre.

- \* **Déformation des variétés complexes** (6 ECTS) par Christophe Mourougane

- \* **Introduction aux D-modules algébriques** (6 ECTS) par Tobias Schmidt

Ce cours introduit les notions et constructions de base de la théorie algébrique de modules sur les opérateurs différentiels, dont les notions de filtrations, de modules cohérents, de modules holonomes et le théorème de Kashiwara.

- \* **Principe de moindre action** (6 ECTS) par Robert Scott

Ce cours étudie comment le principe de moindre action est à la base de la mécanique classique des systèmes

de particules, mais également des théories des champs relativistes. Il introduit les concepts du calcul de variations et de la géométrie différentielle nécessaires aux formalismes de Lagrange et de Hamilton.

\* **Théorie géométrique des groupes** (6 ECTS)

par Rémi Coulon

Ce cours est une introduction à la théorie géométrique des groupes. L'idée centrale est d'étudier la structure d'un groupe (infini) en le regardant non pas comme un objet algébrique mais plutôt comme une créature géométrique. Cette branche des mathématiques a des connexions très riches avec d'autres domaines tels que la topologie algébrique, la théorie des représentations, la théorie ergodique, *etc.* Durant le cours, on abordera entre autres les notions de quasi-isométrie, d'espace hyperbolique au sens de Gromov et de théorie de la petite simplification.

# Thématique « analyse »

## Premier semestre.

### \* **Analyse microlocale & théorie spectrale** (12 ECTS)

dont

#### \*\* **Théorie spectrale**

par Nicolas Raymond

Le cours présente d'abord les concepts nécessaires à l'étude des opérateurs non bornés, avant de développer les éléments fondamentaux de leur théorie spectrale. Une attention particulière est portée à l'étude spectrale des opérateurs différentiels.

#### \*\* **Analyse microlocale**

par San Vũ Ngọc

Le cours a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

### \* **Analyse numérique** (12 ECTS)

dont

#### \*\* **Théorie des éléments finis**

par Nicolas Seguin

Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'extension aux problèmes mixtes est aussi abordée, des points de vue théorique et numérique.

#### \*\* **Implémentation des éléments finis**

par Éric Darrigrand

Cette partie du module propose une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Un travail de programmation est réalisé sous **Matlab** ou **Octave**.

#### \*\* **Volumes finis**

par Nicolas Seguin

Cette partie présente la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis appliquée aux lois de conservation scalaires. On y étudie en outre les extensions éventuelles au cas des systèmes de lois de conservation et au cadre multidimensionnel.

#### \*\* **Modèles cinétiques et méthodes numériques**

par Philippe Chartier

Cette partie traite de méthodes numériques associées aux équations cinétiques. Après une introduction à la modélisation cinétique de la dynamique des plasmas, les propriétés et l'approximation numérique de l'équation de Vlasov sont étudiées. Enfin, on aborde les schémas préservant les asymptotiques liées à cette problématique.

### \* **Équations aux dérivées partielles** (12 ECTS)

dont

#### \*\* **Équations elliptiques**

par Nicoletta Tchou

Le cours étudie d'abord les espaces de Sobolev et les équations elliptiques linéaires. Il se termine par une initiation aux techniques adaptées aux équations elliptiques non linéaires.

**\*\* Équations d'évolution**

par Florian Méhats

Le cours étudie d'abord les systèmes hyperboliques linéaires, puis il se focalise sur les solutions entropiques des lois de conservations scalaires.

## Second semestre.

**\* Analyse numérique des équations aux dérivées partielles hamiltoniennes** (6 ECTS)

par Erwan Faou

Dans ce cours, on étudiera l'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles possédant de fortes propriétés géométriques liées à une structure symplectique. L'équation de Schrödinger, ainsi que certains types d'équations de transport non linéaires seront étudiés en détail. On passera en revue différentes méthodes d'approximation en espace et en temps, et discutera de la préservation des propriétés qualitatives des équations par ces schémas numériques.

**\* Contrôle optimal et équations d'Hamilton-Jacobi** (6 ECTS)

par Marc Quincampoix

Le cours présente les problèmes de contrôle optimal et leurs liens avec les équations d'Hamilton-Jacobi. Il étudie également comment modéliser l'incertitude sur les conditions initiales et explique comment la notion de solutions de viscosité et le transport optimal fournissent des outils adaptés à ces questions.

**\* Équations d'Euler et de Navier-Stokes** (6 ECTS)

par Roger Lewandowski

Le but du cours est de mettre en place des outils de base pour l'étude des deux grands systèmes de la mécanique des fluides que sont les équations d'Euler et les équations de Navier-Stokes.