

## UE du M1 Mathématiques fondamentales

### Table des matières

<b>Semestre 1</b>	<b>2</b>
1.1 Algèbre générale de base . . . . .	2
1.2 Analyse . . . . .	2
Analyse fonctionnelle . . . . .	2
Analyse hilbertienne . . . . .	3
1.3 Chaînes de Markov et martingales . . . . .	3
1.4 Algorithmique de base . . . . .	3
1.5 Fonctions holomorphes et fonctions spéciales . . . . .	4
1.6 Optimisation et recherche opérationnelle . . . . .	4
1.7 Théorie des groupes et géométrie . . . . .	5
1.8 Histoire des Mathématiques . . . . .	5
1.9 Groupe de lecture . . . . .	5
1.10 Langue vivante . . . . .	6
 <b>Semestre 2</b>	 <b>6</b>
2.1 Algèbre commutative et géométrie algébrique . . . . .	6
2.2 Codes correcteurs . . . . .	6
2.3 Distributions et analyse de Fourier . . . . .	6
2.4 Équations aux dérivées partielles . . . . .	7
2.5 Géométrie différentielle . . . . .	7
2.6 Machine learning et régression . . . . .	7
2.7 Résolution numérique de problème aux dérivées partielles en Physique . . . . .	8
2.8 Statistique mathématique . . . . .	9
2.9 Topologie algébrique . . . . .	9
2.10 Travail encadré de recherche . . . . .	9

### Modalités d'évaluation

L'évaluation du M1 Mathématiques fondamentales (M1mathfonda) est en **contrôle continu intégral** : chaque unité d'enseignement (UE) est évaluée par au moins 2 contrôles continus (CC). Il n'y a pas de session 2. En cas d'absence injustifiée (ABI) à une épreuve de CC, la note est 0. En cas d'absence justifiée (ABJ) à une épreuve de CC, soit le CC est neutralisé, soit l'absence justifiée donne droit à un CC de substitution.

# Semestre 1

3 UE obligatoires et 1 UE optionnelle (+ LV + HISM ou groupe de lecture).

## UE obligatoires de 1.1 à 1.3

### 1.1 Algèbre générale de base

Responsable : [Vincent Guirardel](#) (8 ECTS, code : ALGB)

- Modules sur un anneau ;
- Algèbre linéaire : modules, sous-modules, quotients, familles libres, génératrices, bases ; cas des espaces vectoriels ; réseaux ; matrices, opérations élémentaires, forme réduite échelonnée par lignes (dans un corps), forme de Hermite (anneau euclidien), forme de Smith (anneau euclidien) ; application aux groupes abéliens de type fini et à la réduction des endomorphismes ;
- Nombres premiers (factorisation, théorème d'Euclide, critères de primalité ou de non-primalité, le théorème des nombres premiers, le théorème de la progression arithmétique) ;
- Corps finis (rappels, la loi de réciprocité quadratique, Chevalley-Waring) ;
- Géométrie des nombres (formes quadratiques binaires, sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}^n$ , groupes abéliens de type fini, théorèmes de Hermite et Minkowski, si le temps le permet réduction de réseaux, algorithme LLL) ;
- Anneaux d'entiers algébriques (nombres algébriques, entiers algébriques, l'anneau des entiers d'un corps de nombres, ordres, le théorème des unités, factorisation, groupe des classes d'idéaux).

Remarque : des rappels sur les anneaux quotients seront nécessaires, accompagnés de nombreux exemples.

### 1.2 Analyse

Selon le groupe, il s'agit d'ANAF (groupe magistère) ou d'ANAH (groupe Beaulieu).

#### Analyse fonctionnelle

UE d'analyse pour le groupe magistère.

Responsable : [Mihai Gradinaru](#) (8 ECTS, code : ANAF)

- Rappels sur les espaces de Banach, séparabilité, espaces  $L^p$  ; espaces de fonctions continues, théorèmes de Stone-Weierstrass et Ascoli ;
- Semi-normes, espaces de Fréchet ; théorème de Banach-Alaoglu, convergences faibles et faibles-\*, topologies faibles ;
- Topologie des fonctions  $C^\infty$  ;
- Distributions :

- Théorèmes de Hahn-Banach et applications (convexité, Krein-Milman) ;
- Espaces de Hilbert, théorème de projection, théorème de représentation, Lax-Milgram, bases hilbertiennes, relation de Parseval, exemples classiques (polynômes orthogonaux) ;
- Séries de Fourier (théorie  $L^2$ ) (dont le cas de plusieurs variables) ;
- Théorie spectrale des opérateurs compacts, exemples, opérateurs à trace et de Hilbert-Schmidt.

### Analyse hilbertienne

UE d'analyse pour le groupe Beaulieu.

Responsable : [Benjamin Boutin](#) (8 ECTS, code : ANAH)

- Rappels sur les espaces vectoriels normés ;
- Espaces de Hilbert, théorèmes de la projection orthogonale et de représentation de Riesz ; bases hilbertiennes, exemples classiques (polynômes orthogonaux) ; théorèmes de Lax-Milgram et Hellinger-Toeplitz ;
- Espaces de Banach, séparabilité et réflexivité, convergence faible ; théorèmes de Hahn-Banach, de Baire et applications ; espaces de fonctions continues : théorèmes de Stone-Weierstrass et d'Ascoli ;
- Séries de Fourier (théorie  $L^2$ ), transformée de Fourier et convolution ;
- Théorie spectrale des opérateurs compacts ; opérateur à trace et de Hilbert-Schmidt.

### 1.3 Chaînes de Markov et martingales

Responsable : [Jean-Christophe Breton](#) (8 ECTS, code : CMMA)

- Conditionnement : espérance conditionnelle, probabilité conditionnelles, lois conditionnelles ; propriétés, calcul, cas gaussien ;
- Processus à temps discret : filtrations, temps d'arrêt ;
- Martingales : décompositions, inégalités, théorèmes d'arrêt de Doob, théorèmes de convergence presque sûre, uniforme intégrabilité, applications ;
- Chaînes de Markov à espace d'états fini et dénombrable : classifications des états, mesure invariante, théorème ergodique, applications ;
- Marche aléatoire, processus de branchement de Galton-Watson.

**UE optionnelles** : 1 UE au choix parmi [1.4](#)–[1.7](#).

### 1.4 Algorithmique de base

Responsables : [Sylvain Duquesne](#) (6 ECTS, code : ALBA)

- Recherche dichotomique, tris, arbres, complexité ;
- Algorithmes élémentaires pour les graphes ;
- Représentation des nombres entiers et réels, opérations élémentaires ;

- PGCD, PGCD étendu, théorème chinois et arithmétique modulaire ;
- Multiplication multiprécision (Schoolbook, Karatsuba, Toom-Cook, transformation de Fourier rapide si le temps le permet) ; inversion multiprécision (méthode de Newton, exponentiation, ...) ; autres applications de la méthode de Newton (racine carrée) ;
- Réduction modulaire (réduction de Montgomery, bases normales et gaussiennes) ;
- Opérations sur les polynômes (opérations élémentaires, PGCD, interpolation, relations coefficients/racines) ;
- Méthodes de calcul approché des fonctions usuelles ;
- Initiation au traitement de l'information (filtre, FFT, ...).

Si le temps le permet, un ou plusieurs des thèmes suivants pourront être abordés :

- Localisation des racines de polynômes ;
- Factorisation des polynômes, en particulier sur les corps finis.

## 1.5 Fonctions holomorphes et fonctions spéciales

Responsable : [Isabelle Gruais](#) (6 ECTS, code : FHFS)

Contenu : Étude des fonctions spéciales et application à la résolution des problèmes de la physique.

Programme :

- Rappels : fonctions holomorphes, théorème des résidus, formules de Cauchy.
- Séries de Fourier et applications : Méthode de séparation des variables ; Application à l'équation de la chaleur ; Bases hilbertiennes classiques ;
- EDPs linéaires du second ordre : EDPs à coefficients constants ; Définition du symbole et des opérateurs elliptiques ; Équation de Poisson ; Équation de Legendre et Polynômes de Legendre ;
- Équations d'évolution : Équation de la chaleur homogène ; Équation de Schrödinger et polynômes de Laguerre ; Équation des ondes, équation de Bessel ; Oscillateur harmonique, polynômes d'Hermite ; Le pendule simple, intégrales elliptiques ; Fonctions de Jacobi ; Équation d'Euler du corps solide.
- Fonctions diverses : Fonction d'Airy ; Fonctions d'erreur.

## 1.6 Optimisation et recherche opérationnelle

Responsable : [Eric Darrigrand](#) (6 ECTS, code : OPRO)

- Définition d'un problème d'optimisation ; conditions suffisantes et nécessaires d'optimalité ;
- Algorithmes de calcul : méthodes de gradient (pas constant, pas optimal, gradient conjugué) ; cas avec et sans contraintes ;
- Éléments de programmation linéaire : optimisation linéaire, dualité, résolution du problème de programmation linéaire, algorithme du simplexe ;

- Éléments de la théorie des graphes : représentation, plus court chemin ;
- Réseaux et programmation linéaire : problème de transbordement, algorithme fini du simplexe pour les réseaux, problème de transport.

## 1.7 Théorie des groupes et géométrie

Responsable : [Matthieu Romagny](#) (6 ECTS, code : THGG)

- Rappels sur les groupes et les actions de groupes ; résolubilité, simplicité ;
- Groupes symétriques et alternés, familles de générateurs, résolubilité ;
- Groupe linéaire, spécial linéaire sur un corps ; familles de générateurs, résolubilité ; drapeaux, décomposition  $LU$ , décomposition de Bruhat ; groupes linéaires sur un corps fini, utilisation des inversibles d'une sous-algèbre de matrices pour trouver des sous-groupes de Sylow ;
- Géométrie projective : définitions, structure du complémentaire d'un hyperplan, homographies, théorèmes de Thalès, de Pappus, de Desargues ; dualité ;
- Formes sesquilinéaires et quadratiques : réduction ; groupes orthogonaux et symplectiques ; théorème de Witt ; théorème de Cartan-Dieudonné ;
- Formes quadratiques sur  $\mathbb{R}$  ; compacité du groupe orthogonal, sous-groupes fermés (théorème de Cartan) et compacts du groupe linéaire, sous-groupes finis de  $SO(3)$ , polyèdres réguliers ; décompositions de Cartan et d'Iwasawa.

**UE anticipées** : 1.8–1.10.

Ces UE commencent, ou ont lieu, au semestre 1 mais comptent au semestre 2.

## 1.8 Histoire des Mathématiques

Responsable : [Alain Herreman](#) (code : HISM)

L'EC HISM est suivi par le groupe Beaulieu. Il a lieu au semestre 1 mais compte au semestre 2 en combinaison avec le TER (Section 2.10) pour 3 ECTS.

Objectif : acquérir une vue d'ensemble de l'histoire des mathématiques et de l'évolution de ses concepts.

## 1.9 Groupe de lecture

Responsable : [François Bolley](#)

UE du magistère qui remplace l'UE HISM+TER pour le groupe magistère ; elle commence au semestre 1 mais compte au semestre 2, pour 3 ECTS.

## 1.10 Langue vivante

(3 ECTS, code : LV)

Responsable (Beaulieu) : [Nelly Chaline](#), service commun d'étude des langues vivantes appliquées ([SCELVA](#))

Langue vivante à choisir parmi Anglais, Espagnol, Allemand pour le groupe Beaulieu. Pour les étudiants non francophones, il est possible de suivre Français Langue Étrangère (FLE). Seul le créneau d'Anglais est assuré d'être compatible avec l'emploi du temps du M1.

Responsable (Ker Lann) : service de langue de l'ENS Rennes.  
L'Anglais est obligatoire pour le groupe magistère.

## Semestre 2

4 UE à choisir parmi [2.1](#)–[2.9](#) (+TER ou groupe de lecture).

### 2.1 Algèbre commutative et géométrie algébrique

Responsable : [Bernard Le Stum](#) (6 ECTS, code : ACGA)

- Anneaux de polynômes, anneaux factoriels, anneaux locaux, anneaux noethériens, théorème des zéros de Hilbert ;
- Résultants, bases de Gröbner ;
- Ensembles algébriques affines, topologie de Zariski, ensembles algébriques irréductibles, composantes irréductibles ;
- Idéal de définition, anneau de coordonnées, fonctions et applications polynomiales, fonctions rationnelles ;
- Courbes planes généralisées, tangentes, multiplicité d'intersection, théorème de Bézout.

### 2.2 Codes correcteurs

Responsable : [Delphine Boucher](#) (6 ECTS, code : COCO)

- Codes linéaires, codes cycliques ;
- Codes de Reed-Solomon, codes BCH, exemples d'algorithmes de décodage ;
- Codes de Goppa, cryptosystème de Mac Eliece.

### 2.3 Distributions et analyse de Fourier

Responsable [Gabriel Caloz](#) (6 ECTS, code : DANF)

- Espaces des fonctions test  $D$  et  $S$  (sans insister sur la topologie), partitions de l'unité, supports ;

- Distributions, distributions à supports compacts, convergences des suites de distributions opérations élémentaires (dérivation, ...);
- Produit tensoriel, théorème de Fubini, convolution, distributions tempérées; transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz  $S$ , dans  $L^2$  (Parseval), et  $S'$ ; espaces de Sobolev  $H^s$  (en fonction du temps);
- Équations dans  $D'$ ;
- Solutions fondamentales des opérateurs différentiels.

## 2.4 Équations aux dérivées partielles

Responsables : [François Bolley](#) (à Ker Lann), [Nicolas Seguin](#) (à Beaulieu) (6 ECTS, code : EDP)

- Rapide présentation des différentes familles d'EDP et leur motivation en physique;
- Équations de transport : méthode des caractéristiques, principe de conservation, solutions faibles, ...
- Équations elliptiques linéaires : espaces de Sobolev en 1D, théorème de trace, formulations variationnelle et faible du problème de Dirichlet...

## 2.5 Géométrie différentielle

Responsable : [Christophe Dupont](#) (6 ECTS, code : GEDI)

- Rappels de calcul différentiel (théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale en dimension finie);
- Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , définition des variétés (ou surfaces) abstraites, variétés quotients (exemples);
- Applications différentiables entre variétés; théorème du rang, immersion, submersion, plongement;
- Étude affine et métrique des courbes et surfaces de  $\mathbb{R}^3$ ;
- Propriétés métriques des surfaces : première et seconde formes fondamentales, formule de Gauss-Bonnet;
- Étude des variétés réelles de dimension 2; notion de surfaces minimales.

## 2.6 Machine learning et régression

Responsable : [Bernard Delyon](#) (6 ECTS, code : MLR)

L'apprentissage (machine learning) a pour but de trouver des algorithmes permettant de prédire certaines variables (cachées) à l'aide d'autres (observées). Ces algorithmes sont mis au point à l'aide d'un ensemble d'apprentissage où tout est observé. C'est donc le lien entre variables qui doit être décrypté. Le cours est constitué de 9 chapitres qui introduisent les notions de base utiles à la compréhension de ces algorithmes :

1. Analyse factorielle

2. Classification non supervisée (clustering)
3. Analyse discriminante
4. Régression linéaire multiple
5. Ridge, lasso, et ACP
6. Méthodes des  $k$  plus proches voisins et estimateur à noyau
7. Arbres de décision ; validation/comparaison pour les algorithmes de classifications
8. Agrégation de modèles : bagging, forêts aléatoires, boosting et gradient boosting
9. Réseaux de neurones et deep learning

Chaque cours est apparié à une séance de TP. L'évaluation se fait par des rendus d'études de cas. L'approche choisie minimise les prérequis en statistique, mais des notions de base comme la variance, la corrélation, *etc*, devront être maîtrisées, ainsi que les probabilités élémentaires.

## 2.7 Résolution numérique de problème aux dérivées partielles en Physique

Responsable : [Stéphane Balac](#) (6 ECTS, code : RNDP)

Les différents savoirs introduits dans ce cours le seront après avoir motivé leur nécessité en s'appuyant sur des applications variées en physique.

- Introduction aux outils mathématiques permettant l'étude mathématique d'un problème aux limites : principe du maximum, distributions, espaces de Sobolev ; notion de formulation variationnelle, théorème de Lax-Milgram ; ces notions sont dans un premier temps introduites dans le cas de la dimension 1 d'espace et illustrées par l'étude d'un problème aux limites modèle unidimensionnel puis généralisées ultérieurement à la dimension supérieure ;
- Étude d'un problème aux limites elliptique modèle bidimensionnel (équation de Laplace dans un ouvert borné avec conditions aux limites mêlées de Dirichlet et Neumann) ; résultats d'existence et d'unicité de la solution ; recherche de la solution par la méthode de séparation de variables ; approximation par schémas aux différences finies (explicites et implicites) ; approximation par la méthode de Galerkin ; approximation par la méthode des éléments finis.
- Étude d'un problème parabolique modèle (équation de la chaleur non stationnaire en une dimension d'espace) ; résultats d'existence et d'unicité de la solution ; recherche de la solution par décomposition en série de Fourier ; approximation par schémas aux différences finies (explicites et implicites, schéma de Crank-Nicholson) ; notions de consistance et de stabilité d'un schéma aux différences finies ; notion de convergence pour un schéma ;
- Étude d'un problème hyperbolique modèle (l'équation d'advection en une dimension d'espace) ; résultats d'existence et d'unicité de la solution, la méthode des caractéristiques ; approximation par schémas aux différences finies : schéma Upwind et schéma



de Lax-Wendroff ; analyse de la stabilité du schéma par la méthode de Fourier-Von Neumann ; notion de condition CFL ; mise en évidence du phénomène de diffusion numérique.

Les méthodes numériques étudiées dans le cadre de ce cours seront mises en œuvre lors de travaux pratiques sur machine et seront exploitées pour la simulation numérique de phénomènes physiques.

## 2.8 Statistique mathématique

Responsables : [Magalie Fromont](#) (à Ker Lann), [Nathalie Krell](#) (à Beaulieu) (6 ECTS, code : STMA)

- Modèle statistique, modèle paramétrique, identifiabilité, domination ;
- Estimation paramétrique, échantillons, statistiques, estimateurs, propriétés usuelles des estimateurs ;
- Variables aléatoires gaussiennes, vecteurs gaussiens, lois gamma, normes de vecteurs gaussiens, théorèmes de Student et de Cochran ;
- Méthodes de substitutions, méthodes des moments, convergences, intervalles de confiance ;
- Méthodes de contraste, estimateurs des moindres carrés, convergences et intervalles de confiance ;
- Théorie des tests, risque, puissance ; tests de Neyman-Pearson, test du rapport des vraisemblances maximales ;
- Tests de  $\chi^2$  ;
- Statistiques d'ordre, quantiles et fonction de répartition empirique : théorèmes de Glivenko-Cantelli et de Kolmogorov-Smirnov ; test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov.

## 2.9 Topologie algébrique

Responsable : [Tobias Schmidt](#) (6 ECTS, code : TOPA)

- Topologie générale : connexité, connexité locale par arcs, topologie quotient ;
- Groupe fondamental d'un espace topologique ; le cercle et les sphères ;
- Produit libre et somme amalgamée ; théorème de Van Kampen ; groupe fondamental des surfaces ; revêtements et théories galoisiennes ;
- (co-)Homologie singulière et simpliciale (ou cellulaire).

## 2.10 Travail encadré de recherche

Responsable : [Jean-Christophe Breton](#) (code : TER)

Le travail encadré de recherche (TER) est un projet préparé en général en binôme sur un sujet issu d'un article ou d'une partie d'un livre.

Le TER est encadré par un enseignant-chercheur ou chercheur. Celui-ci a pour rôle de

donner un sujet et une bibliographie à partir desquels le binôme doit travailler de façon autonome. Le binôme peut rencontrer son encadrant une à deux fois pour discuter de son avancement et/ou de ses difficultés.

à l'issue du travail, le binôme rédigera un mémoire écrit (maximum 12 à 15 pages) et fera une soutenance orale. Le mémoire et la soutenance peuvent être en français ou en anglais.

Pour le groupe Beaulieu, le TER est obligatoire ; combiné avec l'EC HISM (Section 1.8), il forme une UE de 3 ECTS.

Pour le groupe magistère, l'ensemble TER+HISM est remplacé par le groupe de lecture, organisé à Ker Lann, cf. Section 1.9.