Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications*

(english version below)

Le responsable du Master 2 *Mathématiques Fondamentales et Applications* est

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

Le M2 s'organise autour des deux parcours :
- Algèbre et Géométrie
- Analyse et Probabilités

Chaque étudiant doit valider les trois cours communs et quatre cours spécialisés. Les cours spécialisés sont à choisir parmi les cinq cours proposés à l'Université de Nantes dans chaque parcours. Il est également possible de choisir jusqu'à deux cours du Master 2 partenaire de l'Université de Rennes (avec des frais de transport éventuels pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters nantais.
Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires.

La partie pratique consiste en un stage de 4 mois (à peu près du 15 mars au 15 juillet) dans un laboratoire de recherche sous la direction d'un enseignant-chercheur. Le stage peut se dérouler dans un autre laboratoire que le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes. La recherche du stage commence généralement début janvier et est orientée par le responsable du M2. Ce stage se termine par la remise d'un rapport et une soutenance d'une demi-heure.

Une réunion de rentrée aura lieu à l'Université de Rennes le vendredi 3 septembre. Elle sera l'occasion de présenter tous les cours du premier semestre et de choisir les cours suivis. Si la situation sanitaire le permet, un départ de Nantes sera organisé vers 8h30.

Master 2 de Mathématiques **Année 2021-2022**
Université de Nantes

Master 2 *Fundamental Mathematics and Applications*

The 2nd year of our Master in Fundamental Mathematics is chaired by

Erwan Brugallé erwan.brugalle@math.cnrs.fr

This M2 is organised along two thematics :
- Algebra and Geometry
- Analysis and Probability

Students need to take the three common courses, as well as four specialised courses. The latter are to be chosen among the five courses proposed at Nantes University within each theme. Student may also choose to take up to two courses taught at the Master 2 of Rennes 1 University (the Centre Henri Lebesgue will cover the travel fees from Nantes to Rennes). It is possible to attend more lectures than necessary.

A large part of the second semester is devoted to a 4-month research internship (approximately from March 15th to July 15th) leading to the writing of a Master thesis. This internship may take place in another department than the Laboratoire de Mathématiques Jean Leray in Nantes.

An opening meeting will take place at Rennes University on September 3rd, during which lectures from the first semester will be presented. Students will then choose which courses they will take. If the pandemic situation allows, a departure from Nantes will be organized at 8h30.

Cours communs (premier semestre)

Introduction to differential geometry (Erwan Brugallé)

Résumé : Le but de ce cours est d'introduire, et d'illustrer par de nombreux exemples, les variétés différentielles et les objets associés : champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rahm.

Abstract : The purpose of this course is to introduce, through many examples, differentiable manifolds and differentiable objects that lives on these : vector fields, differential forms, de Rahm Cohomology.

Applications of Fourier Analysis to PDE (Cristina Benea)

Résumé : Plusieurs équations aux dérivées partielles classiques (equations de Laplace et Poisson, equation de la chaleur, equation des ondes, equation Schrodinger) seront étudiées en utilisant les outils fournis par l'analyse de Fourier. Une grande partie du cours sera consacrée à l'étude des espaces des distributions (ou des fonctions généralisées), aux operations sur ces espaces, et aux espaces des Sobolev. Puis, on s'intéressera à l'existence et l'unicité des solutions pour les equations mentionnées ci-dessus.

Abstract : Several classical partial differential equations (Laplace, Poisson, heat, wave and Schrodinger equations) will be studied from the perspective of Fourier analysis. For this, we will need to introduce the formalism of spaces of distributions (or generalized functions), the associated operations and transformations (among which, the Fourier transform), and Sobolev spaces. With this set of tools, we can address questions regarding the existence and the uniqueness of solutions for the equations mentioned above.

Séminaire des étudiants (Gabriel Rivière et Samuel Tapie)

Parcours Algèbre et Géométrie

Premier semestre

Introduction to affine algebraic geometry (Susanna Zimmermann)

Résumé : Une variété algébrique affine est l'ensemble des racines d'un polynôme complexes à plusieurs variables. Par exemple, une parabole est une variété affine, ainsi que toute droite et le graphe d'un polynôme. De l'autre côté, on peut regarder l'anneau des fonctions régulières définie sur une variété affine. En fait, c'est le quotient d'un anneau des polynômes par l'ideal engendré par les polynômes qui définissent la variété. La géométrie de la variété affine est très liées aux propriétés de son anneau des fonctions régulières. La géométrie et l'algèbre se rencontrent ici. Ce cours est une introduction à la géométrie algébrique affine. Pré-requis sont des bases en algèbre commutatif (anneaux, quotients des anneaux par des idéaux).

Abstract : An affine algebraic variety is the zero-set of a polynomial in several variables with complex coefficients. For instance, any parabola is an affine variety, any line, and any graph of a polynomial. On the other side, we can look at the ring of regular functions defined on an affine variety. It is in fact the quotient ring of a polynomial ring modulo the polynomials defining the affine variety. The geometry of an affine variety and the properties of its ring of regular functions are closely related. This is where geometry and algebra meet. This course in an introduction to affine algebraic geometry, perquisites are some basics in commutative algebra (such as rings and quotients of rings).

Topologie algébrique (Baptiste Chantraine)

Résumé : Le but du cours sera d'introduire les premiers outils de la topologie algébriques. Nous commencerons par étudier les revêtements des espaces topologiques et leurs transformations. Cela permettra de définir le groupe fondamental. Nous verrons certains outils permettant de calculer celui-ci, notamment le théorème de van Kampen. Ensuite nous introduirons l'homologie singulière des espaces et étudierons leurs aspects fonctorielsl. Cela nous permettra d'aborder certains aspects de base de l'algèbre homologique de base. Nous terminerons par définir l'homologie cellulaire et certaines méthode pour la calculer. Le cours sera illustré par beaucoup d'exemples explicites.

Abstract : The goal of the class is to introduce the first tools of algrebraic topology. We will first study coverings of topological spaces and their transformations. That will allows us to define the fundamental group. We will devellop tools to compute it for instance van Kampen theorem. We will then introduce singular homology of spaces and study its functorial aspects. That will allow us to study some basic aspects of homological algebra. In the end we will define cellular homology and see how to compute it. All classes will be illustrated with lots of explicit examples.

Deuxième semestre

Branched covers in low dimensions (Marco Golla)

Résumé : On étudiera les revêtements ramifiés des variétés lisses en dimension 3 et 4. Cela porte naturellement sur l'étude des nœuds et des entrelacs dans le 3-variétés, des

4-variétés à bord, et des surfaces plongées dans le 4-variétés. On montrera le théorème de G-signature en dimension 4 et on donnera quelques applications, en particulier aux plongements des surfaces (singulières ou pas) dans des 4-variétés. En fonction des intérêts du public et du temps à disposition, on pourra faire des liaisons avec la géométrie complexe, de contact ou symplectique.

Les notions de base en topologie différentielle et algébrique, au niveau des cours du premier semestre et du séminaire des étudiants, sont essentielles ; les notions de topologie en basse dimension seront introduites le long du cours.

Abstract : We will study branched covers of smooth manifolds of dimensions 3 and 4. This naturally leads to the study of knots and links in 3-manifolds, of 4-manifolds with boundary, and of surfaces in 4-manifolds. We will then prove the G-signature theorem in dimension 4. We will discuss applications to smooth 4-manifolds topology, in particular to embeddings of (possibly singular) surfaces in 4-manifolds. Depending on time and on the audience's interests, we might discuss some complex-geometric, contact, or symplectic aspects of branched covers.

Prior knowledge of differential topology (smooth manifolds, smooth maps, applications of transversality) and algebraic topology (fundamental group, some homology/cohomology), at the level of the first-semester courses and student seminars, is required ; the more low-dimensional notions will be introduced along the way.

Riemann surfaces (Gilles Carron)

Résumé : L'étude des surfaces de Riemann est un sujet à la croisée de la géométrie, de l'algèbre, de la théorie des groupes, de la topologie, de l'analyse complexe et de l'analyse sur les variétés. L'objectif de ce cours est donc d'introduire plusieurs outils géométriques, algébriques, analytiques pour appréhender plusieurs aspects des surfaces de Riemann. Les surfaces de Riemann peuvent être définies comme des variétés complexes de dimension 1, ce sont donc des espaces topologiques qui sont localement homéomorphes à un ouvert de $\mathbb{C}$ et on dispose donc de notions de fonctions holomorphes, méromorphes. Historiquement, la définition de surfaces de Riemann a émergée pour donner un sens géométrique et topologique aux fonctions holomorphes multivaluées comme $\sqrt{z}, \log z$. Un seconde définition équivalente est celle d'une variété réelle de dimension 2 (d'où le nom de surface) équipée chaque espace tangent d'une rotation d'angle $+\pi/2$ ou d'une façon de mesurer les angles orientées.

On étudiera par exemple les fonctions méromorphes et les liens de l'étude des fonctions méromorphes avec la classification des fibrés en droites complexes sur la surface, avec la topologie de la surface et cette étude mènera au théorème de Riemann-Roch, il s'agit d'une formule pour la dimension de l'espace des fonctions méromorphes dont on prescrit les pôles. Ce théorème permet une classification de certaines surfaces (de genre 0et 1). Le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann est un résultat majeur démontré au début du $XX^{\text{ième}}$ siècle par Koebe et Poincaré. Ce théorème permet de géométriser les surfaces de Riemann et de classifier les surfaces de Riemann compactes. On essayera d'en appréhender certaines facettes avec en fonction du développement du cours des approches via l'analyse complexe, la théorie du potentiel (étude des fonctions harmoniques) ou d'analyse globale en étudiant la courbure de Gauss.

Abstract : The study of Riemann surfaces is a subject at the crossroads of geometry, algebra, group theory, topology, complex analysis and analysis on manifolds. The objective of this course is therefore to introduce several geometric, algebraic and analytical tools to understand several aspects of Riemann surfaces. Riemann surfaces can be defined as complex varieties of dimension 1, so they are topological spaces which are locally homeomorphic to an open of $\mathbb{C}$ and we have on them notions of holomorphic and meromorphic functions. Historically, the definition of Riemann surfaces emerged to give a geometrical and topological meaning to multivalued holomorphic functions like $\sqrt{z}, \log z$. A second equivalent definition is that of a real manifold of dimension 2 (hence the name of surface) where each tangent space is endowed with a rotation of angle $+\pi/2$ or a way to measure oriented angles.

We will study for example the meromorphic functions and the links of the study of the meromorphic functions with the classification of complex lines bundle, with the topology of the surface and this study will lead to the Riemann-Roch theorem, it is a formula for the dimension of the space of the meromorphic functions whose poles are prescribed. This theorem allows a classification of certain surfaces (of genus 0and 1). The uniformisation theorem for Riemann surfaces is a major result that have proven at the beginning of the XX's century by Koebe and Poincaré. This theorem allows to geometrize Riemann surfaces and to classify compact Riemann surfaces. We will try to apprehend some facets of this fascinating theorem with, according to the development of the course, approaches via complex analysis, or potential theory (study of harmonic functions) or global analysis by studying the Gauss curvature.

Bibliographic references :

— Ahlfors, L., Complex Analysis, McGraw Hill, 1966.
— Farkas, H., and Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.
— Forster, O. : Lectures on Riemann surfaces, Graduate Texts in Mathematics, vol.81, Springer-Verlag, Berlin,1981.
— Griffiths, P., and Harris, J., Algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.
— Jost J., Compact Riemann Surfaces, An Introduction to Contemporary Mathematics, Universitext, Springer, 2002.
— de Saint-Gervais H.-P., Uniformisation des surfaces de Riemann, Retour sur un théorème centenaire, ENS Édition, 2011. (An english translation is also available).

Introduction à la géométrie riemannienne et kählérienne (Vestislav Apostolov)

Résumé : Ce cours est proposé comme une introduction à la géométrie riemannienne et sa spécialisation sur les variétés complexes, la géométrie kählérienne. Nous couvrirons les sujets classiques suivants : Variétés riemanniennes, connexions, géodésiques. Exemples de variétés riemanniennes. Lemme de Gauss, application exponentielle, théorème de Hopf-Rinow. Transport parallèle, holonomie, théorème d'irréductibilité. Variation première et seconde de la longueur, champs de Jacobi. Courbure sectionnelle, courbure de Ricci, courbure scalaire. Théorèmes de Bonnet-Myers, de Synge, et de Cartan-Hadamard. Uniformisation des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle constante. Théorème de Hodge-De Rham. Champs de Killing et le théorème de Bochner. Métriques kählériennes sur une variété complexe : l'exemple de l'espace projectif complexe. Courbure sectionnelle holomorphe ; le tenseur de Ricci et la courbure scalaire d'une variété kahléienne. Variétés de Calabi-Yau, Kähler-Einstein, et à courbure scalaire constante. Métriques extrémales de Calabi. Exemple : les surfaces complexes de Hirzebruch.

Abstract : This is an introductory course to Riemannian Geometry with a specialization towards its complex version, the Kähler geometry. We are going to cover the following classic material. Riemannian manifolds, the Levi-Civita connection, geodesics. Examples of riemannian manifolds. The exponential map, Hopf-Rinow theorem and Gauss Lemma. Parallel transport, riemannian holonomy, the deRham decomposition theorem. The Riemannian curvature tensor, sectional curvature, Ricci curvature, scalar curvature. Jacobi

fields, the Bonnet-Myers, Synge and Cartan-Hardamard theorems. Uniformization of space forms. Killing vector fields and Bochner's Theorem. Hodge-DeRham theory. Introduction to Kähler geometry : The complex projective space and the Fubini-Study metric. Kähler metrics, Ricci form and the complex Monge-Ampère PDE's. Calabi-Yau manifolds and Kähler-Einstein metrics. Scalar curvature and extremal Kähler metrics. Examples : the Hirzebruch complex surfaces.

Parcours Analyse et Probabilités

Premier semestre

Pseudospectrum, semigroups, and quasimodes for non-selfadjoint operators (Joseph Viola)

Résumé : Grâce au théorème spectral, l'étude d'un opérateur autoadjoint (ou normal) sur un espace de Hilbert se réduit à l'analyse des valeurs et vecteurs propres (ou des objets analogues dans le cas continu). Les opérateurs non-autoadjoints, importants dans plusieurs domaines tels que la théorie des résonances, la théorie cinétique et la théorie des perturbations, ne se ramènent pas si facilement à leurs propriétés spectrales. Nous étudierons des méthodes pour mesurer et comprendre l'écart entre l'idéal autoadjoint et la réalité pour les opérateurs non-autoadjoints.

Abstract : Thanks to the spectral theorem, a self-adjoint (or normal) operator on Hilbert space can be nearly completely understood by studying its eigenvalues and eigenvectors (or their continuous analogues). Non-selfadjoint operators, which appear in many applications including the theory of resonances, kinetic theory, and perturbation theory, are not so easily reduced to their spectral decomposition. We will study ways to measure and understand the distance between the selfadjoint ideal and the true behavior of non-selfadjoint operators.

Introduction à l'intégrale stochastique/Introduction to stochastic integration (Mikael Escobar-Bach)

Abstract : A stochastic process is a phenomenon which evolves through time with a random trajectory, and as such, is represented as a family of random variables indexed by time. In this course, we propose to study the various implications brought by such random object, and hence introduce the concepts of the stochastic process and the stochastic integration. We will first construct and review some basic facts about the Brownian motion, including its Markov property, as it represents a major stochastic process example. Next, we will introduce the concept of the continuous semi-martingale in order to finally construct the stochastic integral with respect to a continuous semi-martingale.

Deuxième semestre

Resonances, normal forms and Hamiltonian nonlinear PDEs (Benoît Grébert)

Résumé : Les solutions de petites amplitudes d'équations aux dérivées partielle non-linéaires dispersives sur un compact sans bord (par exemple un tore ou une sphère) sont soumises à deux effets concurrents :

- la dispersion des ondes, conséquence du fait que les ondes planes solutions de la partie linéaire de l'équation voyagent avec des vitesses différentes (les ondes s'éloignent les unes des autres)
- la compacité du domaine qui incite à l'interaction via la non-linéarité (les ondes sont amenées à se revoir souvent !)

Qui gagne ? La dynamique en temps long va-t-elle vers la stabilité ou la turbulence ? Nous essaierons de répondre (partiellement) à ces questions sur quelques exemples et à travers des méthodes de formes normales dans le cadre des EDPs Hamiltoniennes.

Abstract : Solutions of small amplitudes of non-linear dispersive partial differential equations on a compact without boundary (e.g. a torus or a sphere) are subject to two concurrent effects :

- wave dispersion, a consequence of the fact that the plane waves solving the linear part of the equation travel with different velocities (the waves move away from each other).
- the compactness of the domain which encourages interaction via non-linearity (the waves have to see each other often !)

Which wins ? Does the dynamics in long time go towards stability or turbulence ? We will try to answer (partially) these questions on a few examples and through normal form methods in the context of Hamiltonian PDEs.

Systèmes de particules en interaction de champ moyen / Mean Field interacting particles systems (Paul-Éric Chaudru de Raynal)

Abstract : The main objective of this course consists in introducing stochastic mean field interacting particles systems as well as their asymptotic counterpart known as McKean-Vlasov stochastic systems. These systems describe, respectively, the random evolution of a large number of particles/agents which interact with each other through the empirical measure of the system ; and the dynamic of one of these particles in the asymptotic (with respect to the number of agents) regime. This relies on the theory of Stochastic Differential Equations which will play a central role along the lectures. If time allows, connections with (non-linear) PDEs will be discussed.

Hypocoercivity (Frédéric Hérau)

Abstract : In the past 15 years, a new theory has been developped concerning the long time behavior of kinetic equations, under the name "hypocoercivity". This approach has now proved to be very efficient in the study of a large range of equations. This course is devoted to the main features of this approach in the hilbertian case : basic notions of coercivity and hypocoercivity, relations between the spectral theory and the long time behavior of linear or linearized models. We shall also - depending on the time remaining - study the nonlinear perturbative case, the case of collision kernels of Boltzmann type, the connection with the theory of hypoellipticity and the recent theory of enlarged spaces.