Algèbre - géométrie 1

30h CM - 48 h TD - 8 ECTS

Prérequis

programme de terminale S (hors spécialité maths)

Nombres complexes et calcul algébrique .... 10 h

Définition de l'ensemble des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Module. Argument. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines énièmes. Notation exponentielle et applications à la trigonométrie. Manipulation des signes sommes, des indices. Formule du binôme.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste .... 28 h

Méthodologie mathématique: Connecteurs logiques. Calcul propositionnel. Quantificateurs, variables. Démonstration : récurrence, contraposée, absurde.
Bases de la théorie des ensembles : Éléments, parties, intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien, applications injectives, surjectives et bijectives, composition, restriction, prolongement.

Arithmétique des entiers 20h

Entiers naturels. Entiers relatifs, division euclidienne, pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide. Théorème de Bézout
Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers, critères simples de primalité. Petit théorème de Fermat.
Congruences.

Géométrie plane élémentaire 20h

Vecteurs dans le plan. Notion de vecteurs colinéaires. Parallélisme.
Barycentre dans le plan. Définition, associativité. Application à des problèmes d'alignement et de concours.
Produit scalaire et orthogonalité dans le plan. Théorème de Pythagore. Distance d'un point à une droite. Angles non-orientés. Somme des angles d'un triangle.
Utilisation des nombres complexes en géométrie plane. Définitions (via les nombres complexes) : similitude, isométrie, translation, rotation, réflexion, symétrie glissée. Définition des angles orientés. Mesure d'un angle orienté.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiant.e.s : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiant.e.s. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », l'enseignant.e est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Cette UE vise à aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers, d'abord en ce qui concerne les notions sur les nombres complexes et les bases du raisonnement et du vocabulaire mathématique.
Le chapitre « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions de logique et de raisonnement dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Ce chapitre a vocation à être enseigné en début de semestre en parallèle du chapitre sur les nombres complexes.
Le chapitre « Géométrie plane élémentaire » est l'occasion de développer les connaissances des bacheliers concernant la géométrie dans le plan.

Nombres complexes et calcul algébrique

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de Terminale, ainsi que les bases du calcul algébrique.
Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps C, équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane (qui seront développés dans le chapitre ultérieur de géométrie plane) ;
- la notation exponentielle et ses applications à la trigonométrie.
- calcul algébrique : identités remarquables, notation $\sum$, coefficients binomiaux, formule du binôme

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.
Ce chapitre a vocation à être enseigné en début de semestre, en parallèle du chapitre « Raisonnement et vocabulaire ensembliste »

Contenus	Capacités & commentaires
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de **C** n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie **C** au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Module	
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z-z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation U. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de e^{it} pour $t \in \mathbf{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a\cos b$, $\sin a\cos b$, $\sin a\sin b$.	Les étudiants doivent savoir que des expressions du type cos(p)+cos(q) peuvent se factoriser. *En exercice :* définition et propriétés de e^z pour z complexe
Fonction tangente.	La fonction tangente n'a pas été introduite au lycée. Notation tan. Les formules de $\tan(a \pm b)$ ne sont pas au programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Formules d'Euler.	Linéarisation *En exercice :* calcul de Σ cos(kt), Σ sin(kt)
Formule de Moivre.	*En exercice :* expressions de cos(nt) et sin(nt) en fonction de cos t et sin t.
Formes trigonométriques	
Forme trigonométrique $r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	Relation de congruence modulo 2π sur **R** : utiliser la notation $a \equiv b$ [2pi] en prenant le temps de rappeler sa signification. *En exercice :* Factorisation de $1 \pm e^{it}$ Transformation de a cos t + b sin t en A cos(t − φ)
Équations du second degré	
Résolution des équations du second degré dans C. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Racines *n*-ièmes	
Description des racines *n*-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique	Notation U_n . Représentation géométrique.
Calcul algébrique	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i$ Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Expressions simplifiées de $\sum k, \sum k^2, \sum x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.	
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notation $\binom{n}{p}$
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$	
Formule et triangle de Pascal. Formule du binôme dans **C**.	Lien avec la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en première S (dénombrement de chemins).

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. On évitera, sauf à l'occasion de quelques exercices, la manipulation d'ensembles « de second niveau » (ensemble des parties d'un ensemble, ensemble des applications d'un ensemble dans un autre).
Les notions de relation d'ordre et d'équivalence ne sont pas au programme, mais on signalera à l'occasion des exemples rencontrés dans le cadre de ce cours l'existence de ces notions et le nom des différentes propriétés mises en jeu (réflexivité, symétrie...)
Ce chapitre a vocation à être enseigné en début de semestre, en parallèle du chapitre « Nombres complexes »

Contenus	Capacités & commentaires
Rudiments de logique	
Connecteurs logiques	ET, OU, NON, $\Rightarrow$
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de N possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de N sont hors programme. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante
Ensembles	
Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie).	Ensemble vide.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.	Notation A\B pour la différence et E\A, $\bar{A}$ et C_E^A pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Couple, paire, uplet, famille finie	*En exercice :* ensemble des parties d'un ensemble.
Applications	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. *En exercice :* fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Contenus	Capacités & commentaires
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe d'un ensemble par une application.	Notation $f(A)$. On pourra pour éviter les confusions introduire provisoirement une autre notation (par exemple : f surmonté d'une flèche) On se limitera à des exemples de calculs d'image directe dans des situations simples. On évitera ou on limitera au maximum les exercices théoriques sur l'image directe (image directe d'une union, etc...) La notation d'image réciproque est hors programme, mais peut être manipulée dans des exercices sur des exemples simples.
Composition.	La composée de deux fonctions est rencontrée en terminale, mais sans théorie générale.
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences.
Remarque : les étudiants ayant suivi la spécialité maths ont déjà eu un cours d'arithmétique.

Contenus	Capacités & commentaires
Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans Z, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans N) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Notation $a \wedge b$.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. On pourra introduire l'algorithme d'Euclide étendu. L'étude des idéaux de Z est hors programme.
PPCM.	Notation $a \vee b$. Lien avec le PGCD.
Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss.	
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
Nombres premiers	
Nombre premier.	crible d'Eratosthène
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	
Pour p premier, valuation p-adique.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques

Contenus	Capacités & commentaires
	p-adiques.
	Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur Z.	Notation $a \equiv b \quad [n]$.
Opérations sur les congruences : somme, produit. Équations $ax \equiv b \quad [n]$	Les anneaux Z/nZ seront introduits dans un module ultérieur.
Petit théorème de Fermat.	

Géométrie plane élémentaire

On mettra l'accent sur le raisonnement, plutôt que sur le calcul en coordonnées.
Deux fils rouges seront importants : étude des lieux géométriques en particulier à l'aide du produit scalaire et des barycentres, les théorèmes de la géométrie classique : Thalès, Pythagore, la somme des angles d'un triangle, l'intersection des droites remarquables d'un triangle. On pourra étudier plusieurs démonstrations d'un même théorème.

Contenus	Capacités & commentaires
Vecteurs dans le plan. Théorème de Thalès. Notion de vecteurs colinéaires. Parallélisme.	On introduira le déterminant de deux vecteurs du plan dans le but à terme d'orienter le plan et de définir la notion d'angles orientés.
Barycentre dans le plan.	Définition, associativité. Application à des problèmes d'alignement et de concours.
Produit scalaire Inégalité de Cauchy-Schwarz, et le cas d'égalité. Inégalité triangulaire et le cas d'égalité. Théorème de Pythagore. Distance d'un point à une droite. Angles non-orientés. Somme des angles d'un triangle.	Bien que la formule a été travaillée au lycée, son interprétation a besoin de rappel.
Interprétation géométrique du module et de l'argument de (c-b)/(c-a) Définition des angles orientés. Mesure d'un angle orienté.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. L'ensemble $R/2\pi Z$ n'est pas formellement étudié au lycée, mais les égalités modulo 2π sont manipulées. On s'appuiera sur ceci pour éviter (dans un premier temps) les relations d'équivalence.
Similitudes.	Le lien entre nombres complexes et géométrie plane n'est plus fait au lycée. Les notions d'isométries, translations, etc. non plus. Définitions (via les nombres complexes) : similitude, isométrie, translation, rotation, réflexion, symétrie glissée. On pourra utiliser les nombres complexes pour montrer les théorèmes de compositions des similitudes directes. *Les similitudes seront vues en détail au premier semestre de la L2 : il s'agit ici d'une introduction et on ne visera pas nécessairement un traitement exhaustif.*